

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد

كلية التربية للعلوم الصرفة

الخلاصة

تهدف الدراسة إلى إيجاد نموذج أمثل من بين النماذج الخطية وغير الخطية لبيانات مقترضة وهذه باستخدام الاشتقاق بطرق (المربعات الصغرى ودالة الإمكان الأعظم) ويعد هذا البناء من أهم الدراسات الحديثة. واعتمدنا في بناء النماذج الرياضية على اختبار F أو T واختبارات حدود الثقة واكتفينا في هذا البحث باختبار F.

الكلمات المفتاحية: النموذج الأمثل, النماذج الخطية وغير الخطية

Determine the optimal model between linear models and non-linear

Lecture Arshed A. Ahmad

College of Education for Pure Science

Abstract

The study aims to find optimal model of linear models and non-linear data using this assumption and derivation methods (Least Squares and Maximum Likelihood function), and this building is one of the most recent studies.

And adopted in building mathematical models to test the F or T and tests the limits of confidence and just in this research tested the F.

Keyword: The optimal model, linear models and non-linear

المقدمة

لما يوجد من أهمية بالغة في العلم الحديث لبناء النماذج وانتشار هذا العلم في البحوث الحديثة لما يقع من أهمية لهذه النماذج في بناء استراتيجيات ورؤى مستقبلية في جميع جوانب الحياة منها (اجتماعية واقتصادية ...) أردنا في هذا البحث المقارنة بين النماذج لمعرفة أي نموذج يمكن ان يكون أمثل من غيره في رسم هذه الاستراتيجيات.

قمنا بأخذ ثلاثة نماذج للمقارنة فيما بينهم وتبدأ:

1. النموذج العام وكيفية اشتقاق هذا النموذج بطريقتين المتعارف عليهما (طريقة المربعات الصغرى ودالة الإمكان الأعظم) وكذلك كيفية بناء اختبار F والمقارنة بين هذه النماذج وكذلك بناء حدود الثقة لهم.
 2. قمنا ببناء النموذج الخطي أيضا باشتقاقه بالطرق السابقة للنموذج وكذلك بناء النموذج الأسّي واللوغارتمي لبيانات مفترضة ربما قد نكون بنينا هذه النماذج وان نضع لمسه صغيرة في استخدام النماذج.
- يعد البناء من أهم الدراسات الحديثة في بناء ورسم الخطط فتعتمد أسلوب المقارنة كأساس لمعرفة أي النماذج تحتل الصدارة من حيث اقل MSE وقبول الفرضيات من عدمها في اختيار الـ F لهذا استغرق في هذا البحث جميع الاشتقاقات والطرق الرياضية في البناء.

النموذج القياسي الخطي البسيط [1] Simple Linear Model

أن النموذج القياسي الخطي البسيط يصف وبوضع العلاقة بين متغيرين هما y, x بعلاقة دالية $y=f(x)$ ويمكن التعبير عن هذه العلاقة رياضيا $y = \beta_0 + \beta_1 x$ وهذه العلاقة الرياضية هي علاقة محددة (Deterministic) أو مضبوطة ويدعى النموذج بالنموذج التحديدي وأن هذه المعادلة لا تعبر عن حقيقة العلاقة بين المتغيرين لذلك يتم إضافة المتغير العشوائي (Random Variable) أو حد الاضطراب (Disturbus term) إلى المعادلة الرياضية أعلاه وتكون $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$ فتحول العلاقة من علاقة محددة إلى علاقة تصادمية (stochastic) ويدعى النموذج في هذه الحالة بالنموذج الاحتمالي (Probably Model) ويلاحظ إن النماذج التحديدية لا تسمح بوجود الأخطاء سواء كانت هذه الأخطاء في القياسات أو في المتغيرات، أن النماذج الاحتمالية تأخذ الأخطاء بنظر الاعتبار.

الخطأ العشوائي وأسبابه [2] Error stochastic term

أن من أهم المشاكل التي يواجهها باحث هو مشكل عدم التأكد (uncertainly) لذلك يعتمد القياس بشكل أساس على الاستدلال الإحصائي والذي يعتمد بدوره على قوانين الاحتمالات بالتالي على وجود الأخطاء في التقديرات. وتستوجب مشكل عدم التأكد ادخال المتغير العشوائي (u) في النموذج لتحويل الى نموذج احتمالي أما سبب إضافة المتغير العشوائي الى النموذج وذلك لقياس أثر المتغيرات الأخرى التي حذف من النموذج بسبب جهل الباحث بوجودها أو كيفية قياسها أو للقياسات الناتجة عن المعاينة (Sampling) أو عن قياس المتغير التابع او عدم معرفة الباحث بالشكل الصحيح لعلاقة

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد

الدالية بين المتغيرات، أو لصعوبة تحديد سلوك البشر مسبقاً، أو لوجود بعض المتغيرات غير المتوقعة ذات التأثير القليل

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \quad \text{على المتغير التابع، أن النموذج الخطي البسيط يكون بالشكل التالي}$$

حيث y_i هو المتغير التابع أو المعتمد أو الداخل أو مقدار الاستجابة، x_i هو متغير مستقل أو خارجي أو متغير توضيحي.

u_i هو متغير عشوائي، حد الخطأ، حد الاضطراب.

طريقة المربعات الصغرى [3] Ordinary least square method

تعتمد على أن تجعل انحراف القيم التقديرية أقل ما يمكن وتكتب اختصاراً O.L.S وهي طريقة لتقدير (estimate) معلمات النموذج القياسي ويتلخص مبدأ هذه الطريقة بجعل مجموع مربعات انحرافات القيم التقديرية عن القيم الحقيقية أقل ما يمكن (جعل مجموع مربعات الخطأ أقل ما يمكن)، أما سبب استخدام هذه الطريقة فسهولة حساب تقدير المعلمات بواسطة O.L.S مقارنة بالطرق الأخرى، بالإضافة إلى أن تقدير المعلمات باستخدام O.L.S تتصف بصفتها أكثر فعالية من الطرق وكذلك مقطعية النتائج المستحصلة بهذه الطريقة.

اشتقاق طريقة المربعات الصغرى [3]

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u$$

بالاشتقاق نحصل على

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i / n}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n} \dots \dots \dots (1)$$

$$\beta_0 = \hat{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \dots \dots \dots (2)$$

الصيغة التقديرية حول نقطة الأصل للمعادلة $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

خصائص مقدرات المربعات الصغرى [3] The properties of O.L.S

أن مقدرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ تمتاز بخاصية أفضل مقدر خطي غير متميز (best liner unbiased estimate) ويرمز لها اختصاراً (BLUE) وتعني كلمة (best) بأنه المقدر له أقل تباين (Minimum Variance) في حين انه طريقة (M.L.E) تعطينا مقدر غير متميز ذو أقل تباين (MVUE) بما أن العلاقة بين المتغير المستقل x_i والمتغير التابع y_i هي خطية بالإضافة إلى ثابت المتغير المستقل فأننا نحتاج إلى تقدير المعالم β_1, β_0 .

دالة الإمكان الأعظم ^[4] Maximum Likelihood function

$$\begin{aligned}
 y &= x\beta + u \\
 E(y) &= E(x\beta) + E(u) \\
 &= x\beta + 0 + x\beta \\
 \text{var}(y) - \text{cov}(y) &= \sigma^2 I_n \\
 y &\sim N(x\beta, \sigma^2 I_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M.L.E &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u'u} \\
 y &= x\beta + u \\
 u &= y - x\beta \\
 M.L.E &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-x\beta)'(y-x\beta)\right] \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y'y - y'x\beta - \beta'x'y + \beta'x'x\beta)\right] \\
 \ln M.L.E &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - 2\beta'x'y + \beta'x'x\beta) \\
 \frac{\partial \ln M.L.E}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2}(2x'y + 2\hat{\beta}x'x) = 0 \\
 \hat{\beta} &= (x'x)^{-1}x'y \\
 \frac{\partial \ln M.L.E}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} - (y'y - 2\beta'x'y + \beta'x'x\beta) \left(-\frac{1}{2\sigma^4}\right) \\
 &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(y'y - 2\beta'x'y + \beta'x'x\beta) = 0 \\
 \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{(y-x\beta)'(y-x\beta)}{n} = S^2 = \frac{e'e}{n} = MSE = \frac{SSE}{n}
 \end{aligned}$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

$$\underline{y} = \underline{x}\underline{\beta} + \underline{u}$$

$$\underline{u} = \underline{y} - \underline{x}\underline{\beta}$$

$$\underline{y} = \underline{x}\hat{\underline{\beta}} + e \quad \text{estimate Model}$$

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'\underline{y}$$

$$\underline{e} = \underline{y} - \underline{x}\hat{\underline{\beta}} = \underline{y} - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'\underline{y} = (\underline{x}\underline{\beta} + \underline{u}) - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'(\underline{x}\underline{\beta} + \underline{u})$$

$$= \underline{u} - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'\underline{u} = [I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}']\underline{u}$$

$$\text{let } A = I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}' \quad \text{then } \underline{e} = A\underline{u}$$

A is symmetric and independent matrix then

$$A' = [I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'] = I_n' - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}' = I - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}' = A$$

A is symmetric

$$\begin{aligned} A'A &= [I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'] [I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'] = [I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'] [I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'] \\ &= I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}' = A \end{aligned}$$

$$e'e = (A\underline{u})' A\underline{u} = \underline{u}' A' A \underline{u} = \underline{u}' A \underline{u} = \underline{u}' [I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'] \underline{u}$$

$$\begin{aligned} E(e'e) &= E[\underline{u}' [I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'] \underline{u}] = E(\underline{u}'\underline{u}) \text{tr}[I_n - \underline{x}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'] = \sigma^2 I_n [\text{tr} I_n - \text{tr}(\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'\underline{x}] \\ &= \sigma^2 I_n [n - (k+1)] \end{aligned}$$

$$E(e'e) = \sigma^2 [n - k - 1]$$

$$\frac{E(e'e)}{n - k - 1} = \sigma^2$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

[5] General Linear Model (GLM) النموذج الخطي العام

في معظم الظواهر يكون النموذج بشكل نموذج خطي عام ونقصد بالنموذج الخطي العام هو أن المتغير المعتمد y_i

يكون داله لكثير من متغيرين مستقلين (x_1, x_2, \dots, x_n) أن يكون $y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ويمكن كتابته بشكل نموذج خطي

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, k \quad \text{حيث أن } y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + u_i \quad \text{عام}$$

$$y_i = \sum_{j=0}^k \beta_j x_{ij} + u_i$$

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد

حيث إن عدد المعالم هو $(k+1)$ ويمكن كتابة النموذج أيضا بشكل مصفوفات $y = x\beta + u$

حيث أن y يمثل موجة المشاهدات للمتغير المعتمد ذات بعد $n \times 1$

x يمثل مصفوفة المشاهدات للمتغير المستقل ذات بعد $n \times k + 1$

β يمثل موجة المعالم المطلوب تقديرها ويكون ذات بعد $k + 1 \times 1$

u هو موجة الأخطاء الناتجة من الفرق بين القيمة الحقيقية والتقديرية للمتغير المعتمد ذات بعد $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$1 - u \sim N[0, \sigma^2 I_n]$$

$$2 - E(u_i u_j) = 0 \quad \text{when } i \neq j$$

$$3 - E(u_i x_i) = 0$$

بالإضافة إلى الفروقات أعلاه (3) يجب أن لا تكون هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة كما أن عدد المشاهدات يجب أن لا تزيد عن عدد المعالم المطلوب تقديرها وهذا يعني أن عدد أعمدة المصفوفة x في النموذج والبالغة $(k+1)$ يجب أن تكون أقل من عدد صفوفها والبالغة n وبعبارة أخرى $rank x = k + 1 < n$ وهذا الفرض لا يتحقق عندما تكون قيمة أحد المتغيرات المستقلة ثابت وذلك لأن محدد المصفوفة يكون مساو إلى الصفر وبالتالي لا يمكن إيجاد معكوس المصفوفة.

$$E(\underline{u}) = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{var}(\underline{u}) = \begin{bmatrix} \text{var}(u_1) \\ \text{var}(u_2) \\ \vdots \\ \text{var}(u_n) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد

$$\begin{aligned} \text{var}(\underline{u}) - \text{cov}(\underline{u}) &= E(\underline{u}\underline{u}') = E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \cdots & u_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

$$\underline{u} = \underline{y} - \underline{x}\underline{\beta}$$

$$\underline{u}\underline{u}' = (\underline{y} - \underline{x}\underline{\beta})(\underline{y} - \underline{x}\underline{\beta})' = (\underline{y} - \underline{x}\underline{\beta})(\underline{y}' - \underline{x}'\underline{\beta}')$$

$$\frac{\partial \underline{u}\underline{u}'}{\partial \underline{\beta}} = -2\underline{x}'\underline{y} + 2\underline{x}'\underline{x}\underline{\beta} = 0$$

$$\underline{\beta} = (\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'\underline{y}$$

$$\text{and } \hat{\underline{\beta}} = (\underline{x}'\underline{x})^{-1} \underline{x}'\underline{y}$$

أن أفضل تقدير خطي غير متميز المعالم نموذج (G.L.M) يعني التقدير الذي يتمتع بالخصائص التالية:

1. أن يكون تشكيله خطية Linear computation

2. أن يكون غير متميز un biased

3. أن يكون تباينه أصغر من تباين أي مقدر آخر.

والإثبات أن المعالم $\tilde{\underline{\beta}}$ هي أفضل تقدير خطي من مشاهدات العينة

اختبار ^[6] (linear hypothesis) $H\underline{\beta} = \underline{h}$

نفرض النموذج الخطي العام $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + e_i, i = 1, 2, \dots, n$

1. اختبار linear hypothesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2$

$$\beta_1 - \beta_2 = 0$$

$$H = [0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0], \underline{\beta}' = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4], \underline{h} = [0]$$

2. اختبار linear hypothesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2, H_0 : \beta_3 = \beta_4$

$$\beta_1 - \beta_2 = 0, \quad \beta_3 - \beta_4 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \underline{\beta}' = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4], \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشاد أدهم أحمد

3. اختبار $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 6$ linear hypothesis

$$\beta_1 = 6, \quad \beta_2 = 6$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4], \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4. اختبار $H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ linear hypothesis

$$\beta_0 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_5, \quad \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4], \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. اختبار $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ linear hypothesis

$$\beta_1 = \beta_2, \beta_1 = \beta_3, \beta_1 = \beta_4$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 0, \beta_1 - \beta_3 = 0, \beta_1 - \beta_4 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4], \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. اختبار $H_0 : \beta_1 - 2\beta_2 = 4\beta_3, \quad H_0 : \beta_1 + 2\beta_2 = 6$ linear hypothesis

$$\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta_3 = 0, \quad \beta_1 + 2\beta_2 = 6$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4], \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان كل الفرضيات المذكورة اعلاه هي حالة خاصة من $H\underline{\beta} = \underline{h}$ حيث H هو $(p \times q)$ مصفوفة و \underline{h} هو

$(1 \times q)$ مصفوفة عمودية، p هو عدد المعاملات في النموذج و q هو عدد من القيود.

1. $H\underline{\beta} = \underline{h}$ هي مجموعة متناسقة من المعاملات.

2. H هو مصفوفة من حجم $(p \times q)$ مع رتبة q (HH' is full rank)

فترات الثقة Confidence interval^[2]

تحديد قيم (Limiting values) باستخدام $\hat{\beta}_i$ بحيث نظمن وقوع القيمة الحقيقية للمعلمة β داخل تلك الحدود

بدرجة ثقة معينة وتسمى الفترة ما بين حدي الثقة بفترة الثقة عند استخدام مستوى ثقة 0.95 فهذا يعني ان 0.95 من القيمة

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشاد أدهم أحمد

الحقيقية للمعلمة تقع داخل فترة الثقة وان 0.05 تقع خارج فترة الثقة ويرمز الى فترة الثقة (C.I) وان فترة الثقة للمعلمتين

$$\beta_1, \beta_0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_0)}}, \quad \text{var}(\hat{\beta}_0) = S^2 \left(\frac{1}{n}, \frac{\bar{x}^2}{\sum x_i^2} \right)$$

$$pr \left[-t_{(d.f., \alpha/2)} \leq t \leq t_{(d.f., \alpha/2)} \right] = 1 - \alpha$$

$$pr \left[-t_{(d.f., \alpha/2)} \leq \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_0)}} \leq t_{(d.f., \alpha/2)} \right] = 1 - \alpha$$

$$pr \left[\hat{\beta}_0 - t_{(d.f., \alpha/2)} \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_0)} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{(d.f., \alpha/2)} \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_0)} \right] = 1 - \alpha$$

$$pr \left[\hat{\beta}_1 - t_{(d.f., \alpha/2)} \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_1)} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{(d.f., \alpha/2)} \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_1)} \right] = 1 - \alpha \quad \text{وأن}$$

اختبار نسبة الاحتمال العامة لأختبار $H_0: H\beta = h$: [7]

الآن نريد ان نستنتج اختبار للاختبار $H_0: H\beta = h$ ضد $H_1: H\beta \neq h$ في GLM، حيث

$y = x\beta + e_i$, $e_i \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ سنقوم باستخدام GLRT التي هي على النحو التالي:

$$K(y) = \frac{\max_{(\beta, \sigma^2) \in W} [L(\beta, \sigma^2; y)]}{\max_{(\beta, \sigma^2) \in \Omega} [L(\beta, \sigma^2; y)]} = \frac{L(\hat{W})}{L(\hat{\Omega})}$$

حيث يتم اعطاء مساحة العينة Ω و W من قبل:

$$\Omega = \{(\beta, \sigma^2) : \beta \in E_p, \sigma^2 > 0\}$$

$$W = \{(\beta, \sigma^2) : \beta \in E_p, H\beta = h, \sigma^2 > 0\}$$

القاسم في $K(y)$ هي دالة الأماكن الأعظم التي تعطي اعلى قيمة للمعالم β و σ^2 .

البسط في $K(y)$ هي دالة الأماكن الأعظم تعويضية لقيود $H\beta = h$ في دالة الاحتمال

$$L(\beta, \sigma^2; y) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (y - x\beta)' (y - x\beta) \right],$$

$$L(\hat{\Omega}) = (2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2 \Omega)^{-n/2} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2 \Omega} (\underline{y} - x\hat{\beta})' (\underline{y} - x\hat{\beta}) \right] \quad \text{but } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (\underline{y} - x\hat{\beta})' (\underline{y} - x\hat{\beta})$$

$$L(\hat{\Omega}) = (2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2 \Omega)^{-n/2} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\hat{\sigma} \Omega} (n\hat{\sigma}^2 \Omega) \right]$$

$$L(\hat{\Omega}) = (2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2 \Omega)^{-n/2} e^{-n/2}$$

الآن نفرض \underline{b} هو مقدار لـ (β) و W

$$L(\hat{W}) = (2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2 w)^{-n/2} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\hat{\sigma} w} (\underline{y} - x\hat{b})' (\underline{y} - x\hat{b}) \right]$$

where $\hat{\sigma}^2 w = \frac{1}{n} (\underline{y} - x\hat{b})' (\underline{y} - x\hat{b})$

$$K(y) = \frac{L(\hat{W})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{(2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2 w)^{-n/2} e^{-n/2}}{(2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2 \Omega)^{-n/2} e^{-n/2}}$$

$$[K(y)]^{-1/q} - 1 = \frac{\hat{\sigma}^2 w - \hat{\sigma}^2 \Omega}{\hat{\sigma}^2 \Omega}$$

نفرض G تكون $[(p-q) \times p]$ مصفوفة من رتبة $(p-q)$ ، حيث $0 < q < p$ ، G متعامد على H و p هو عدد العوامل في النموذج، q هو عدد القيود في المعاملات، $(p-q)$ هو عدد غير مقيد من المعاملات. نفرض بان $(q \times p)$ مصفوفة وتقسيمها على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} H_{(q \times p)} \\ G_{(p-q) \times p} \end{bmatrix}$$

نكتب $\underline{y} = x\underline{\beta} + \underline{e}$

عندما $H_0: H\underline{\beta} = \underline{h}$ ، فان النموذج يصبح:

$$W = \frac{\left(\frac{1}{q}\right) \underline{z}' [x(x'x)^{-1} x' - B(B'B)^{-1} B'] \underline{z}}{\left(\frac{1}{n-p}\right) \underline{z}' (I - x(x'x)^{-1} x') \underline{z}} = \frac{\left(\frac{1}{q}\right) \underline{z}' A_3 \underline{z}}{\left(\frac{1}{n-p}\right) \underline{z}' A_1 \underline{z}} = \frac{\frac{1}{q} u_3}{\frac{1}{n-p} u_1}$$

هناك تركيب خطي بين \underline{z} و \underline{y} ومن ثم \underline{z} يتم توزيعه \underline{y} بشكل طبيعي مع المتوسط والتباين.

$$E(\underline{z}) = E(\underline{y} - x\bar{H}\underline{h}) = E(\underline{y}) - x\bar{H}\underline{h} = x\underline{\beta} - x\bar{H}\underline{h}$$

$$\text{var}(\underline{z}) = \text{var}(\underline{y} - x\bar{H}\underline{h}) = \text{var}(\underline{y}) = \sigma^2 I$$

$$\underline{z} \sim N(x\underline{\beta} - x\bar{H}\underline{h}, \sigma^2 I)$$

نلاحظ بان $\underline{z}'[x(x'x)^{-1}x'-B(B'B)^{-1}B']\underline{z}$ و $(H\hat{\beta}-\underline{h})[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta}-\underline{h})$ هي نفس النتيجة التي هي

ثم $\underline{z}'[x(x'x)^{-1}x'-B(B'B)^{-1}B']\underline{z} = (H\hat{\beta}-\underline{h})[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta}-\underline{h})$ ثم $\underline{z}'(H\bar{x})(H\bar{x})\underline{z}$

$$W = \frac{(H\hat{\beta}-\underline{h})[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta}-\underline{h})}{\underline{y}'[I-x\bar{x}]\underline{y}} \left(\frac{n-p}{q} \right)$$

$$W \sim F_{(q, n-p, \lambda)}$$

وهذا يعني $\underline{y}'[I-x\bar{x}]\underline{y}$ و $(H\hat{\beta}-\underline{h})[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta}-\underline{h})$ تكون مستقلة.

1. باستخدام النموذج e^x :

نفرس النموذج الخطي $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + e$ باختبار الفرضيات التالية:

$$H_0 : \beta_3 = 0, \quad H_0 : \beta_1 = \beta_2, \quad H_0 : \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 0, \quad H_0 : 2\beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3 = 0$$

حيث $\underline{y}' = [1 \quad 4 \quad 8 \quad 9 \quad 3 \quad 8 \quad 9]$

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}'\underline{x} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad (\underline{x}'\underline{x})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/6 & 3/4 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}'\underline{y} = \begin{bmatrix} 42 \\ 4 \\ 38 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}'_{\Omega} = \left[\frac{11}{3} \quad 1 \quad 3 \quad \frac{11}{6} \right]$$

$$SST = y'y = 316, \quad SSR = \hat{\beta}'x'y = 312.33$$

$$SSE = SST - SSR = y'y - \hat{\beta}'x'y = 3.67$$

$$MSE = S^2 = \frac{SSE}{n-p} = \frac{3.67}{3} = 1.22 = \hat{\sigma}_{\Omega}^2$$

$$MSR = \frac{SSR}{p} = \frac{312.33}{4} = 78.08$$

$$\hat{y} = \frac{11}{3} + x_1 + 3x_2 + \frac{11}{6}x_1^2 \quad \text{predicate model}$$

$$F = 4.97$$

$$F_{(q,n-p,\alpha)} = F_{(2,3,0.05)} = 9.55$$

علينا ان نقبل H_0 ، ثم النموذج هو $y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + e$

باستخدام المعادلات التالية:

$$\hat{\beta}_w = \hat{\beta}_{\Omega} - (x'x)^{-1}H[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(x\hat{\beta}_{\Omega} - h)$$

$$\hat{\sigma}_w^2 = \hat{\sigma}_{\Omega}^2 + \frac{1}{q}(x\hat{\beta}_{\Omega} - h)[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(x\hat{\beta}_{\Omega} - h)$$

$$F = \left(\frac{\hat{\sigma}_w^2 - \hat{\sigma}_{\Omega}^2}{\hat{\sigma}_{\Omega}^2} \right) \left(\frac{n-p}{q} \right)$$

2. باستخدام النموذج الخطي:

$$y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_1 + e \quad \text{النموذج الأصلي}$$

لكن $\beta_3 = 0$ و $\beta_1 = \beta_2$ ولأن نقبل H_0 ، ثم $y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + e$

$$y = \alpha_0 + \alpha_1z + e \quad \text{ثم النموذج يصبح } \beta_0 = \alpha_0, \beta_1 = \alpha_1, z = x_1 + x_2$$

$$z' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad z'z = \frac{1}{82} \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad z'y = \begin{bmatrix} 42 \\ 42 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = (z'z)^{-1}z'y = \frac{12}{41} \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210/41 \\ 84/41 \end{bmatrix}$$

$$SST = y'y = 316, \quad SSR = \hat{\alpha}z'y = 301.17, \quad SSE = 14.83, \quad p = 2, \quad n = 7, \quad q = 2$$

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد

$$MSE = S^2 = \frac{SSE}{n - p - q} = \frac{14.83}{3} = 4.94 = \hat{\sigma}_w^2$$

$$F = 4.56$$

$$F_{(q, n-p, 0.05)} = F_{(2, 3, 0.05)} = 9.55$$

F الجدولية < F المحسوبة

∴ نقبل فرضية H_0

وبالتالي فإن النموذج يكون أكثر قبولا $y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + e$

3. باستخدام النموذج اللوغارتمي:

$$x'x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 1 & 0 & 12 & 1 & 9 \\ 3 & 17 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F=7.23$$

F الجدولية < F المحسوبة

∴ نقبل فرضية H_0

الاستنتاجات

1. النموذج الخطي لهذه البيانات كانت اقل F هو يكون النموذج الذي بني بهذه البيانات وهو خطي يكون ملائم لهذه البيانات حصرا.
2. بالنظر إلى النماذج السابقة (الخطية-الأسية-اللوغارتمية) نجد إن باختبارات F إن نموذج الخطي لهذه البيانات يكون أصلح .
3. وان بناء النموذج حسب طبيعة البيانات قد تكون متفاوتة حسب ملائمة النماذج السابقة وطبيعة البيانات لو كانت البيانات اقتصادية ويراد بناء نماذج لهذه البيانات نعتقد باختلاف النتائج.
4. ان بقية النماذج الخطية واللوغارتمية أيضا قد تكون ملائمة لبناء نماذج لهذه البيانات.

تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد

المقترحات

1. اعتماد النماذج الغير خطية اذا كانت البيانات اقتصادية.
2. ايجاد اكثر من اختبار في المستقبل للختيار من ناحية الأفضلية للنماذج وهذا ماسوف نقوم بدراسة مستقبلا.

المصادر

1. عدنان غانم، مطانيوس مخول، السنة الثالثة "مبادئ الإحصاء" جامعة دمشق 2005-2006
2. د. نعيم ثاني المحمد، د. خاشع محمود الراوي، د. مؤيد احمد يونس، د.وليد خضير المراني "مبادئ الإحصاء" جامعة بغداد لسنة 1986
3. د. خاشع محمود الراوي "مدخل الى الإحصاء" لسنة 1984
4. امير حنا هرمرز "الأحصاء الرياضي" لسنة 1985
5. Graybill F. A. "theory and application of the linear model" 1988, john wiley and sons.
6. GARY W. HEIMAN "Basic statistics for the behavioral sciences" 2003.
7. Robert V. Hogg, Allen T. Graig "Introduction to Mathematical statistics" 1970.