مثال (٨)

إذا كانت $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ عينه عشوائيه مختاره من مجتمع يتبع توزيع بواسون بمعلمه θ فاثبت أن $\overline{X}$ تقدير متسق للمعلمه θ .

الحــــل :

حيث أن X تتبع توزيع بواسون بمعلمه θ فإن

$$E(X) = V(X) = \theta$$

وعلى ذلك فإن

$$E(\overline{X}) = \theta \quad , \quad V(\overline{X}) = \frac{\theta}{n}$$

ويكون

$$\text{(i)} \qquad \lim_{n \to \infty} E(\overline{X}) = \theta$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{n \to \infty} V(\overline{X}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\theta}{n} = 0$$

وعلى ذلك فإن $\overline{X}$ مقدر متسق للمعلمه θ .

٣-٥ الكفاءة Efficiency

تعريف (٣)

إذا كان T_1 , T_2 مقدران غير متحيزان للمعلمه $g(\theta)$ وكان

$$V(T_1) < V(T_2)$$

فيقال أن T_1 أكثر كفاءه من T_2 في تقدير $g(\theta)$ وأن الكفاءه النسبيه Relative efficiency للتقدير T_2 بالنسبه للتقدير T_1 هى

$$e = \frac{V(T_1)}{V(T_2)}$$

مثال (٩)

إذا كانت (y_1 , y_2 , y_3) عينه عشوائية مختاره من مجتمع توزيعه هو

$$f(y\ ;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} \qquad ; \quad y > 0$$

وكان

$$T_1 = y_1 ; T_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_3) ; T_3 = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2) ; T_4 = \bar{y}$$

١ – هل هذه التقديرات غير متحيزه للمعلمه θ .

٢ – احسب الكفاءه النسبيه لهذه التقديرات بالنسبه للتقدير T_4 .

الحـــل :

حيث أن

$$E(y_i) = \theta \qquad ; \qquad V(y_i) = \theta^2$$

فإن

$$E(T_1) = \theta \qquad ; \qquad E(T_2) = \frac{1}{2}[E(y_1) + E(y_3)] = \theta$$

$$E(T_3) = \frac{1}{3}[E(y_1) + 2E(y_2)] = \frac{1}{3} . 3\theta = \theta$$

$$E(T_4) = E(\bar{y}) = \theta$$

وعلى ذلك فإن جميع التقديرات غير متحيز ، كما أن

$$V(T_1) = \theta^2 \ ; \ V(T_2) = \frac{\theta^2}{2} , V(T_3) = \frac{5}{9}\theta^2 \quad , V(T_4) = \frac{\theta^2}{3}$$

وتكون الكفاءه النسبيه للتقديرات بالنسبه للتقدير T_4 كما يلى

$$\frac{V(T_4)}{V(T_1)} = \frac{\theta^2/3}{\theta^2} = \frac{1}{3} = 33\ \%$$

$$\frac{V(T_4)}{V(T_2)} = \frac{\theta^2/3}{\theta^2/2} = \frac{2}{3} = 67\ \%$$

$$\frac{V(T_4)}{V(T_3)} = \frac{\theta^2/3}{5\,\theta^2/9} = \frac{9}{15} = 60\ \%$$

مثال (١٠)

اختيرت عينه عشوائيه من $N(\mu\ ,\sigma^2)$ أيهما أكفأ في تقدير المتوسط μ (i) الوسط الحسابي للعينه $\overline{X}$ أم (ii) وسيط العينه $\tilde{X}$.

الحــل :

من المعلوم في حالة التوزيع الطبيعي أن

$$E(\overline{X}) = E(\tilde{X}) = \mu$$

وأن

$$\text{(i)} \qquad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$ (لجميع قيم n)

$$\text{(ii)} \qquad V(\tilde{X}) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$ (لقيم n الكبيره)

وعلى ذلك فإن

$$V(\overline{X}) < V(\tilde{X})$$

أى أن الوسط الحسابى للعينه $\overline{X}$ أكثر كفاءه من وسيط العينه وأن الكفاءه النسبيه هى

$$e = \frac{V(\overline{X})}{V(\tilde{X})} = \frac{2}{\pi} \approx 0.64\ \%$$

مثال (١١)

إذا كانت $(X_1 , X_2 ,..., X_n)$ عينه عشوائيه مختاره من مجتمع توزيع

الإحتمالي

$$f(x\ ;\theta) = \frac{1}{\theta} \qquad ; \ 0 < x < \theta$$

أى المقدرات الآتيه أكثر كفاءه ؟

$$(i) \quad T_1 = 2\,\bar{X} \qquad (ii) \quad T_2 = 2\,\tilde{X} \qquad (iii) \quad T_3 = \frac{n+1}{n}\,U$$

حيث $\bar{X}$ الوسط الحسابي للعينه

$\tilde{X}$ وسيط العينه

U أكبر قراء في العينه $\max(X_i)$

الحـــل :

من الامثله السابقه نجد أن

$$E(T_1) = E(T_3) = \theta$$

$$V(T_1) = \frac{\theta^2}{3n} \qquad , \qquad V(T_3) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

والآن نوجد دالة الكثافـــة الإحتمالية لوسيط العينه ، لذلك وللســـهوله سنـــ

$n = 2m+1$ حتى تكون فرديه . ودالة الكثافة الإحتماليه للوسيط هى

$$f(\tilde{x}\ ;\theta) = (2m+1)\binom{2m}{m}\left(\frac{\tilde{x}}{\theta}\right)^m \left(1-\frac{\tilde{x}}{\theta}\right)^m \frac{1}{\theta} \qquad ; \ 0 < \tilde{x} < \theta$$

$$V(T_1) = \frac{\theta^2}{6m+3}$$

$$V(T_2) = \frac{\theta^2}{2m+3}$$

$$V(T_3) = \frac{\theta^2}{(2m+1)(2m+3)}$$

واضح أن

$$V(T_3) < V(T_1) < V(T_2)$$

كما أن الكفاءه النسبيه للتقدير T_1 بالنسبه للتقدير T_3 هى

$$\frac{V(T_3)}{V(T_1)} = \frac{3}{2m+3}$$

ونلاحظ أنها تقل كلما كبر حجم العينه ، وبالمثل فإن الكفاءه النسبيه للتقدير T_2 بالنسبه للتقدير T_3 هى

$$\frac{V(T_3)}{V(T_2)} = \frac{1}{2m+1}$$

وربما يكون هناك مقدرات أخرى غير متحيزه أفضل من المقدرات السابقه .

تعريف (٤)

إذا كان T^* مقدر غير متحيز للمعلمه $g(\theta)$ وكان $V(T^*) < V(T)$ حيث T أى تقدير غير متحيز آخر للمعلمه $g(\theta)$ فإنه يقال أن T^* المقدر الاكفأ The efficient estimator . وعلى ذلك فإن المقدر الغير متحيز T^* هو المقدر الاكفأ إذا كان له أقل تباين بين المقدرات الغير متحيزه للمعلمه $g(\theta)$ أى أن المقدر الاكفأ هو المقدر الغير متحيز بأقل تباين . وإذا وجد هذا المقدر فإنه يمدنا بقاعده لقياس كفاءة باقى المقدرات .

٣-٦ المقدرات الغير متحيزة بأقل تباين

Minimum Variance Unbiased Estimators (M . V . U . E)

تعريف (٥)

إذا كانت $(X_1, X_2, ..., X_n)$ عينه عشوائيه مختاره من مجتمع $f(x\,;\theta)$

وكان الإحصاء $T^* = \phi(X_1, X_2, ..., X_n)$ يتوفر فيه الصفات الآتية:

(i) T^* مقدر غير متحيز للمعلمه $g(\theta)$.

(ii) T^* له أقل تباين بين كل المقدرات الغير متحيزه للمعلمه $g(\theta)$

فيقال أن T^* مقدر غير متحيز بأقل تباين MVUE.

وبتحديد أكثر يعتبر T^* مقدراً غير متحيز بأقل تباين للمعلمه $g(\theta)$

إذا كان

(i) $E(T^*) = g(\theta)$

(ii) $V(T^*) \le V(T)$

حيث T أى مقدر غير متحيز آخر للمعلمه $g(\theta)$.

مثال (١٢)

إذا كانت $(X_1, X_2, ..., X_n)$ عينه عشوائيه مختاره من مجتمع متوسطه μ وتباينه σ^2 أوجد المقدر الخطي الغير متحيز بأقل تبيان للمعلمه μ.

الحـــل:

نفرض أن هذا المقدر هو

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

حيث a_i مقادير ثابته

$$E(T) = \Sigma a_i E(X_i) = \Sigma a_i \mu = \mu \Sigma a_i$$

لكى يكون T مقدراً غير متحيز للمتوسط μ فلا بد أن يكون

$$\Sigma a_i = 1 \qquad (i)$$

$$V(T)=V(\Sigma a_i X_i)=\Sigma a_i^2\ V(X_i)$$

$$=\Sigma a_i^2 \sigma^2=\sigma^2 \Sigma a_i^2$$

ويكون هذا التباين أقل ما يمكن إذا كان Σa_i^2 أقل ما يمكن . وتصبح المسأله هي :

إيجاد القيمة الصغرى للمقدار Σa_i^2 بشرط $\Sigma a_i = 1$.

ولحل هذه المسأله نتبع طريقة لاجرانج Lagrange ونكون الدالة

$$Q=\Sigma a_i^2+\lambda(\Sigma a_i-1)$$

وهى تحتوي على$(n+1)$ متغير رياضي وهم $\lambda, a_i\ (i = 1, 2,\ldots, n)$ وعلى ذلكفإنتانفاضل Q بالنسبه لكل من λ, a_i ثم نساوى بالصفر

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i}=2a_i+\lambda=0 \qquad \therefore \quad a_i=-\frac{\lambda}{2} \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda}=\Sigma a_i-1=0 \qquad \therefore \quad \Sigma a_i=1 \qquad \text{(iii)}$$

من المعادله (ii) وبالجمع على جميع قيم a_i نحصل على

$$\Sigma a_i=-\frac{n\lambda}{2} \qquad \text{(iv)}$$

$$1=-\frac{n\lambda}{2}$$

$$-\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{n} \qquad \text{(v)}$$

وبالتعويض في (ii) نحصل على

$$\therefore \quad a_i=\frac{1}{n}$$

وهذه القيم تجعل تباين T أقل ما يمكن وعلى ذلك فإن

$$T = \Sigma \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \Sigma X_i = \overline{X}$$

أى أن الوسط الحسابي للعينه هو مقدر خطى غير متحيز بأ قل تباين .

مثال (١٣)

إذا كان T_2 , T_1 مقدرين غير متحيزين للمعلمه θ وكان

$$T = a\, T_1 + (1-a)\, T_2$$

(أ) اثبت أن T مقدر غير متحيز للمعلمه θ.

(ب) إذا كان T_2 , T_1 مستقلين أوجد قيمة a التى تجعل له أقل تباين .

الحـــل :

(أ)

$$E(T) = a E(T_1) + (1-a) E(T_2)$$

$$= a\theta + (1-a)\theta$$

$$= \theta$$

$\therefore$ T هو أيضاً مقدر غير متحيز للمعلمه θ .

(ب)

$$V(T) = a^2 V(T_1) + (1-a)^2 V(T_2)$$

$$= a^2 \sigma_1^2 + (1-a)^2 \sigma_2^2$$

حيث أن σ_2^2 , σ_1^2 هما تباين T_2 , T_1 على التوالى .

لكى نحدد قيمه a التى تجعل $V(T)$ أقل ما يمكن فإننا نفاضل $V(T)$ بالنسبه إلى a ونساوي بالصفر فنحصل على

$$2a\sigma_1^2 - 2(1-a)\sigma_2^2 = 0$$

$$\therefore \quad a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad , \quad 1 - a = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

وعلى ذلك يكون أكفأ مقدر غير متحيز هو

$$T = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} T_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} T_2$$

وأن

$$V(T) = \frac{\sigma_1^2 \ \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

مثال (١٤)

إذا كان لدينا عينتين مستقلتين حجمهما n_1, n_2 تم اختيارهما من نفس المجتمع ، وكان متوسط العينتين هما $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ أوجد أكفأ مقدر لمتوسط المجتمع .

الحـــل :

$\overline{X}_1, \overline{X}_2$ مقدرين غير متحيزين لمتوسط المجتمع μ وأن

$$V(\overline{X}_1) = \frac{\sigma^2}{n_1} \quad , \quad V(\overline{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n_2}$$

حيث أن σ^2 هى تباين المجتمع .

وإذا أخذنا

$$T = a\overline{X}_1 + (1-a)\overline{X}_2$$

كمقدر آخر لمتوسط المجتمع ، فيكون T مقدر غير متحيز وله أقل تباين إذا كان

$$a = \frac{\sigma^2 / n_2}{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}} \quad , \quad 1-a = \frac{\sigma^2 / n_1}{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}$$

بالتالي T تصبح

$$T = \frac{n_1 \overline{X}_1 + n_2 \overline{X}_2}{n_1 + n_2} = \overline{\overline{X}}$$