وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ديالى – كلية الادارة والاقتصاد

قسم الاقتصاد

الرياضيات للاقتصاديين 2

المرحلة الثانية

م.م. نور كريم عاصي

محاضرات الكورس الثاني

المحاضرة الثالثة

الفصل الاول

التفاضل

يعتبر موضوع التفاضل من المواضيع المهمة في اغلب الفروع العلمية والهندسية والاقتصادية، وذلك عن طريق دراسة الحساسية التي تتأثر فيها الدالة عندما يطرأ اي تغيير على المتغير المستقل، فمن مصلحة رب العمل ان يعرف التغير في عدد وحدات البيع عندما يتغير السعر مثلا.

سنتطرق في هذا الفصل الى بعض التعاريف المهمة في هذا الموضوع وكذلك التطرق الى قواعد المشتقة دون الدخول الى براهينها واستعراض بعض في مجال الاقتصاد.

1-1 تعريف

يرمز لمشتقة الدالة f عند النقطة x بالرمز $f'(x)$ او $\frac{dy}{dx}$ و تعرف بالصيغة التالية:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

بشرط ان تكون الغاية موجودة.

اذا كانت $f'(x)$ موجودة ، فيقال ان الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x .

مثـــال (1):

افرض ان $f(x)=10x+7$ هل ان الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

الحـــل:

يجب ان نبرهن ان الغاية التالية موجودة ام لا .

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10(x+h)+7-10x-7}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}10=10$$

وعليه فأن $f'(x)=10$ وهذا يعني ان الدالة قابلة للاشتقاق.

مثـــال (2):

اوجد $f'(x)$ للدالة التالية: $f(x)=\frac{1}{x}$

الحـــل:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

مثـــال (3):

اوجد $f'(x)$ للدالة التالية $f(x)=x^2$.

الحـــل:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

مثـــال (4):

اوجد $f'(x)$ للدالة التالية $f(x)=\sqrt{x}$ عندما x موجبة.

الحـــل:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[\sqrt{x+h}-\sqrt{x}].[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}]}{h[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

وبذلك فأن المشتقة موجودة عندما تكون x موجبة.

2-1 قوانين الاشتقاق

سنذكر بعض القوانين المهمة التي تساعدنا في اشتقاق بعض الدوال الشائعة والمعتمدة نسبيا والتي يمكن برهنتها باتباع خطوات جبرية منظمة، وخطوات عملية ايجاد مشتقة دالة ما مستمدة من التعريف وغالبا ما تكون عملية مطولة بيد اننا سوف لن نبرهن هذه القوانين ويمكن تلخيصها كما يلي:

1. اذا كانت $f(x)=c$ ، حيث c عدد ثابت فأن $f'(x)=0$.

مثـــال (1):

اوجد مشتقة الدوال التالية:

أ. $f(x)=7$ ب. $g(x)=-5$ ج. $h(x)=\sqrt{2}$

الحـــل:

بتطبيق القاعدة اعلاه فأن جميع هذه الدوال مشتقتها مساوية الى الصفر اي:

$$f'(x)=0 \quad g'(x)=0 \quad h'(x)=0$$

2. اذا كانت $y=x^n$ حيث n عدد نسبي فأن :

$$\frac{dy}{dx}=n\,x^{n-1}$$

مثـــال (2):

اوجد مشتقة الدوال التالية:

أ. $f(x)=x^3$ ب. $f(x)=\frac{1}{x^5}$

ج. $f(x)=x^{3/2}$ د. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

الحـــل:

أ. $f'(x)=3x^2$

ب. $f'(x)=\frac{d}{dx}[x^{-5}] = -5x^{-6}$

ج. $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

د. $f'(x)=\frac{d}{dx}[x^{\frac{1}{2}}] = -\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

3. اذا كانت $y=c\,f(x)$ حيث c ثابت ، f دالة ما فأن:

$$\frac{dy}{dx}=c\,f'(x)$$

مثـــال (3):

اوجد مشتقة ما يلي:

أ. $y=-2x^3$ ب. $y=5x$

الحـــل:

أ. $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[-2x^3]=-6x^2$

ب. $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[5x]=5$

4. اذا كانت كل من f و g دوال قابلة للاشـتقاق بالنسـبة الـى x وكـان $y=f(x)\pm g(x)$ فأن:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\pm g'(x)$$

مثـــال (4):

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي:

أ. $y=x^3+2x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[x^3+2x^2]$$
$$=\frac{d}{dx}[x^3]+\frac{d}{dx}[2x^2]$$
$$=3x^2+4x$$

ب. $y=\frac{3x^2+2}{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[\frac{3x^2+2}{\sqrt{x}}]$$
$$=\frac{d}{dx}[3x^{\frac{3}{2}}]+\frac{d}{dx}[\frac{2}{\sqrt{x}}]$$
$$=3\frac{d}{dx}[x^{3/2}]+2\frac{d}{dx}[x^{\frac{-1}{2}}]$$
$$=\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{-3}{2}}$$

5. اذا كانت $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ وكانـت كـل مـن g و h دوال قابلـة للاشتقاق فأن f قابلة للاشتقاق ايضا وان:

$$f'(x)=h(x)g'(x)+g(x)h'(x)$$

مثـــال (5):

اوجد مشتقة الدالة التالية $y=x^3(x^2+1)$

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \frac{d}{dx}[x^2+1] + (x^2+1)\frac{d}{dx}[x^3]$$
$$= x^3(2x) + (x^2+1)(3x^2)$$
$$= 2x^4 + 3x^4 + 3x^2$$
$$= 5x^4 + 3x^2$$

مثـــال (6):

أوجد مشتقة الدالة التالية $y = \sqrt{2}(x^2+3x)$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}\frac{d}{dx}[x^2+3x]$$
$$= \sqrt{2}(2x+3)$$

6. اذا كانت $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ حيث ان الدوال g و h قابلة للاشتقاق وان $h \neq 0$ فأن f قابلة للاشتقاق ايضا.

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{[h(x)]^2}$$

مثـــال (7):

افرض ان $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$ اوجد $f'(x)$

الحـــل:

$$f'(x) = \frac{(x^3+1)(2x) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{2x^4+2x-3x^4}{(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{-x^4+2x}{(x^3+1)^2}$$

مثـــال (8):

اذا كانت $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ اوجد $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(x+1)(2)-2x(1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}$$

3-1 الدوال الضمنية وقوانين الاشتقاق

عندما لايكون بالامكان كتابة الدالـــة بالصـــيغة $y = f(x)$ وانمـــا دوال ترتبط فيها x و y على شكل معادلات $f(x,y) = 0$ بحيث يكون من الصـــعب كتابة احد المتغيرات بدلالة المتغير الاخر فقط.

مثـــال (11):

الدوال التالية تعتبر دوال ضمنية

$$2x^2+xy+y^2-5=0$$

$$2xy=8$$

$$y^5+3xy+x^2=9$$

لايجاد مشتقة الدالـــة الضمنية، نطبق قـــوانين الاشـــتقاق علـــى المعادلـــة $f(x,y) = 0$ مباشرة باعتبار y كدالة الى x ، ثم حل معادلة المشـــتقة لايجـــاد $\frac{dy}{dx}$.

مثـــــال (12):

افرض ان $x = y^2$ اوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحـــــل:

لو افترضنا بأن y دالة الى x وباشتقاق طرفي المعادلة إعلاه باستخدام قوانين الاشتقاق نحصل على مايلي:

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}[y^2]$$

$$1 = 2y \frac{dy}{dx}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

واذا اردنا حساب $f'(4)$ مثلا فأن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$$= \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

مثـــــال (13):

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة التالية $x^2 + y^2 = 1$.

الحـــــل:

لنعتبر y دالة الى x ونأخذ المشتقة للجانبين

$$\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2] = \frac{d}{dx}[1]$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$