
الوحدة الأولى
المتجهات
Vectors

محتويات الوحدة

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،

مرحبا بك في الوحدة الأولى من مقرر أساسيات المكانيكا الكلاسيكية، وهي تتناول موضوع المتجهات.

لا شك أنك تدرك الفرق بين الكمية القياسية (كالكتلة) والكمية المتجهة (كالقوة)، وكثيرا ما كنا نضرب لطلبتنا مثالا يتعلق بالقوى المتعاكسة التي تدفع طاولة من طرفين متقابلين، فتبقى الطاولة ثابتة مكانها لأن اتجاه القوة الأولى معاكس لاتجاه القوة الثانية، وكنا نربط هذا المثال الفيزيائي بقوله تعالى: "ولا تنازعوا فتفشلوا وتذهب ريحكم" فالنزاع يشبه دفع المسألة الواحدة باتجاهين مختلفين، فلا المسألة تتحرك بالاتجاه المطلوب؛ ولا القوى الدافعة تحافظ على عنفوانها حتى النهاية، وإنما يذهب الريح أو (القوة) سدى.

سنتناول في هذه الوحدة تعريف الكميات المتجهة والكميات القياسية، ونركز بشيء من التفصيل على الكميات المتجهة؛ إذ نعرّف جمع المتجهات وطرحها، ونعرف متجه الوحدة، وحاصل ضرب المتجهات القياسي والاتجاهي، مع إيراد أمثلة فيزيائية ورياضية عليها وسنتناول أيضاً حاصل الضرب القياسي الثلاثي وحاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي.

وقد زودنا الوحدة بعدد كبير من الأمثلة التوضيحية والأسئلة الخاصة بالتقويم الذاتي، والتدريبات، وذلك لمساعدتك في فهم مادة هذه الوحدة بكل يسر وسهولة، فإذا واجهتك أي صعوبة في فهم أي جزء منها فما عليك إلا أن تلجأ إلى مشرفك الأكاديمي فهو حاضر دائما لمساعدتك.. لا تنتظر اللقاء الدوري معه، وإنما بادر بالاتصال به؛ واستفسر عن كل ما تحتاج إليه.

نرحب بك مرة أخرى في هذه الوحدة، نتمنى أن تكون مفيدة لك، وأن تساهم معنا في اقتراحات لتطويرها مستقبلاً.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس،،،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

1) **تفرّق** بين الكمية القياسية والكمية المتجهة.

2) **تشرح** الكميات القياسية/ المتجهة بعباراتك الخاصة.

3) **تمثل** المتجهات تمثيلاً بيانياً.

4) **تشرح** كيفية جمع المتجهات وطرحها عملياً ونظرياً.

5) **تعدد** بعض خصائص المتجهات.

6) **تجري** عمليات رياضية لإيجاد حاصل الضرب القياسي والاتجاهي.

7) **تربط** بين ضرب المتجهات وبعض الكميات الفيزيائية والرياضية.

8) **تجري** عمليات رياضية لإيجاد حاصل الضرب القياسي الثلاثي والضرب الاتجاهي الثلاثي.

1. الكميات القياسية والكميات المتجهة

Scalars and Vectors

عزيزي الدارس،

هنالك نوعان من الكميات الفيزيائية التي نتعامل معها ، **النوع الأول** يسمى بالكميات **القياسية** او العددية **والنوع الثاني** يسمى بالكميات **المتجهة.**

الكميات القياسية (العددية) تتحدد بالمقدار فقط ولا تتأثر بتغير الاتجاه ومن الأمثلة عليها:

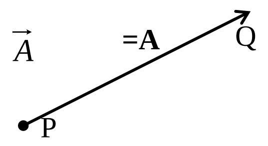
المسافة، الكتلة، الزمن، الكثافة، الطاقة، درجة الحرارة، وضغط الدم.

أما الكميات المتجهة فتتعين بالمقدار والاتجاه معاً مثل:

الإزاحة، السرعة ، التسارع (العجلة)، القوة (وبالتالي الوزن)، العزم.

ويرمز للمتجه بحرف غامق مثل **A** في شكل (1) او بوضع سهم على الحرف مثل $\vec{A}$ في نفس الشكل. كما يمكن تمثيله بيانياً بسهم PQ، حيث P (نقطة الابتداء) و Q (نقطة انتهاء) ويعبر عن مقدار المتجه أو طوله بكتابته على الصورة $|\vec{A}|$ أو A (خط فاتح).

الشكل (1)



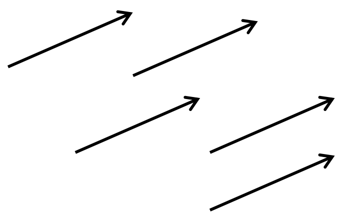
2. خواص المتجهات Properties **of** Vectors

1.2 تساوي المتجهات Equality of Vectors

عزيزي الدارس،

يتساوى المتجهان إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه، لذلك نستنتج أن موقع المتجه في الفضاء لا يحدد المتجه وبالتالي يمكن إزاحة المتجه من موقع في الفضاء إلى آخر، شرط ألا يتغير طوله أو اتجاهه فجميع المتجهات في الشكل (2) متساوية.

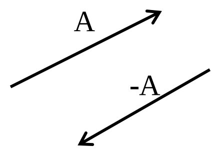
الشكل (2)



2.2 سالب المتجه Negative Vector

إذا كان $\overrightarrow{A}$ متجه فإن A- يسمى سالب المتجه A وهو متجه له نفس طول A واتجاهه عكس اتجاه A (الشكل 3).

الشكل (3)

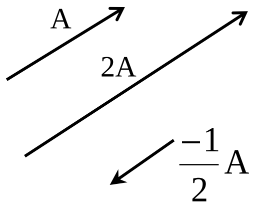


3.2 ضرب المتجهات بأعداد حقيقية

Multiplication of Vectors by Real Numbers

إذا كان $\vec{A}$ متجها وكان n عدداً حقيقياً غير الصفر فإن $n\vec{A}$ هو متجه طوله يساوي $|\vec{A}|$ $|n|$ أي $|n|A$ واتجاهه هو اتجاه $\vec{A}$ نفسه، إذا كانت n موجبة، وبعكس الاتجاه إذا كانت n سالبة، فمثلاً $2\vec{A}$ هو متجه طوله يساوي ضعفي طول $\vec{A}$ وله اتجاه $\vec{A}$ نفسه، أما $\frac{-1}{2}\vec{A}$ فهو متجه طوله يساوي نصف طول $\vec{A}$ وباتجاه معاكس لاتجاه $\vec{A}$.

الشكل (4)



ومن الأمثلة الفيزيائية على ضرب المتجه بكمية قياسية قانون نيوتن الثاني (Newton’s Second Law) والذي ينص على أن محصله القوي $\vec{F}$ المؤثرة على جسم كتلته m وتسارعه $\vec{a}$ هي : $\vec{F} = m\vec{a}$ جيث m كمية قياسية.

4.2 جمع المتجهات Addition of Vectors

عند جمع المتجهات يجب أن تكون للمتجهات البعد (Dimension) نفسه أي له نفس الابعاد, فمثلاً لا يمكن أن نجمع متجه إزاحة إلى متجه سرعة.

حاصل جمع المتجهين (محصلة المتجهين) $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في الشكل (5 أ) المرسوم أدناه (مع أخذ مقياس رسم مناسب) يمكن تمثيله بالمتجه $\vec{C}$ الناشئ من وضع نقطة ابتداء المتجه $\vec{B}$ على نقطة انتهاء المتجه $\vec{A}$ وتوصيل نقطة ابتداء المتجه $\vec{A}$ بنقطة انتهاء المتجه $\vec{B}$

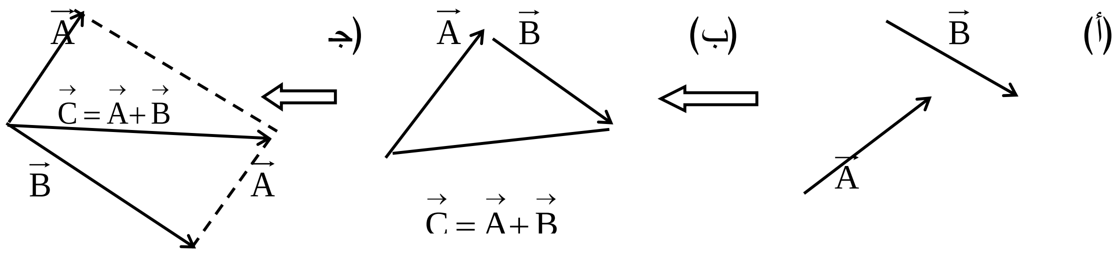
انظر الشكل (5 ب) وهذه الطريقة تعرف بطريقة المثلث (Triangle Method of addition) نكتب:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}.$$

هذا التعريف يكافئ قانون متوازي الأضـلاع (Parallelogram Law for Vector addition) بجمع المتجهات كما هو موضح في الشكل (5 جـ).

C = A+B

الشكل (5)

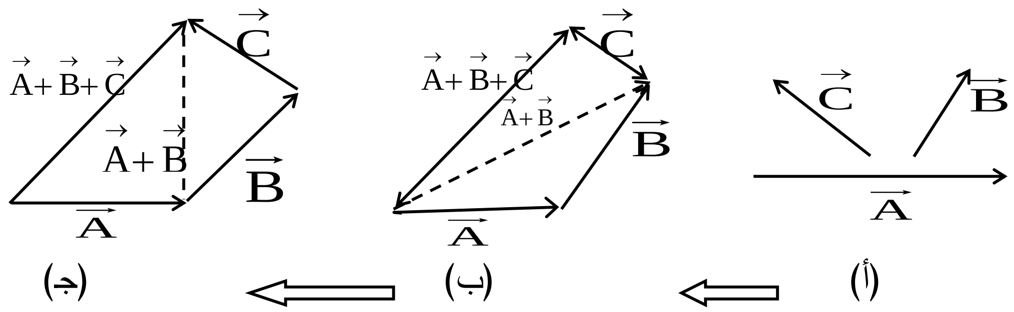


ويتضح من الشكل (5 جـ) أننا إذا بدأنا عملية الجمع بأخذ المتجه $\vec{B}$ أولاً ثم جمعنا إليه المتجه $\vec{A}$ أي قمنا بعملية الجمع $\vec{B}+\vec{A}$ فإننا نحصل على نفس المحصلة السابقة نفسها $\vec{C}$، وهذا يعني أن ترتيب المتجهات في عملية الجمع لا يغير في النتيجة وبذلك نستطيع أن نكتب:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

وتسمى هذه النتيجة **بقانون التبادل للجمع** (Commutative Law of addition) وهذه الطريقة تطبق لجمع أكثر من متجهين، فمثلاً إذا رغبنا في إيجاد حاصل جمع المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ الشكل (6 أ) فإن بالإمكان أن نأخذ حاصل جمع $\vec{B}+\vec{A}$ ثم نضيف عليه المتجه $\vec{C}$ الشكل (6ب).

الشكل (6)



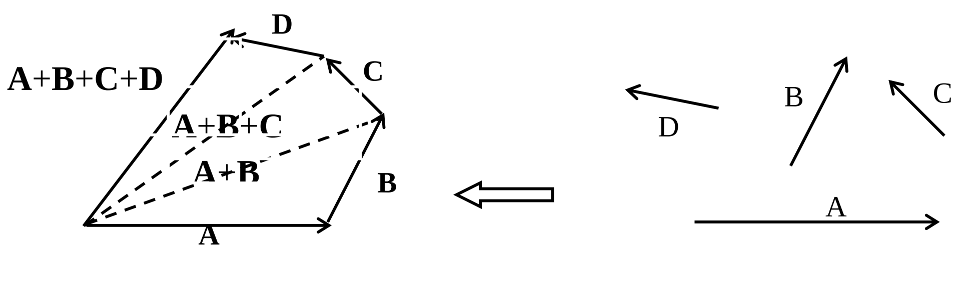
كذلك يمكن إجراء عملية الجمع بأخذ حاصل جمع $\vec{B}+\vec{C}$ أولاً ثم نضيف إليه المتجه $\vec{A}$ كما في الشكل (6 جـ) وكما هو موضح في الرسم فإننا نحصل على نفس النتيجة السابقة، ويمكن أن نعبر عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

وتسمى هذه الخاصية **بقانون الترافق للجمع** (Associative Law of addition).

وكذلك يمكن تعميم طريقة المثلث للجمع لتشمل أكثر من ثلاثة متجهات، فمثلاً إذا فرضنا حاصل أربع متجهات **A,B,C,D** (الشكل (7) أ) فإننا نرسم الواحد تلو الآخر كما في الشكل (7) ب وتكون المحصلة بقفل المضلع من بداية المتجه **A** وتنتهي عند رأس المتجه **D**.

الشكل (7)

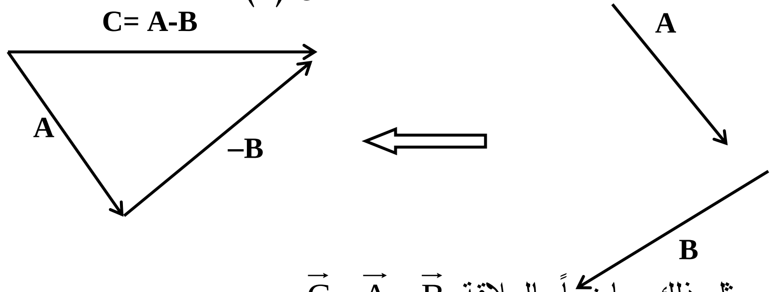


$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$ (ب) $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ (أ)

5.2 طرح المتجهات Subtraction of Vectors

إن عملية طرح المتجهات شبيهة بعملية جمع المتجهات، فمثلاً الفرق بين المتجهين $\vec{B}, \vec{A}$ يمثل بالمتجه $\vec{A} - \vec{B}$ مثلا هو المتجه $\vec{C}$ ولتحديد المتجه $\vec{C}$ نقوم برسم المتجه $\vec{A}$، أولاً ومن رأس A نرسم متجهاً موازياً ومعاكساً في الاتجاه للمتجه $\vec{B}$ الشكل (8) وهذا المتجه هو- $\vec{B}$.

الشكل (8)



ويمثل ذلك رياضياً بالعلاقة $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$.

مثال (1)

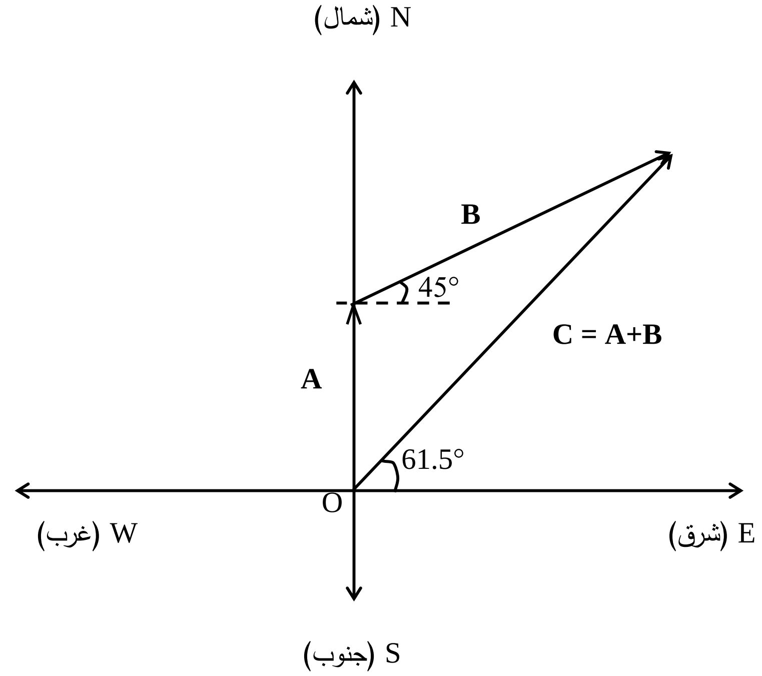
عربة تقطع 3 كم جهة الشمال، ثم 5 كم شمال شرق كما هو موضع بالشكل (9) مثل هذه الإزاحات بيانياً وحدد محصلة الإزاحة بالرسم.

الحل:

نختار مقياس رسم مناسب وليكن كل 1 كم يمثل بمقدار 2 سم، المتجه $\vec{A}$ يمثل إزاحة العربة 3كم جهة الشمال (على الرسم 6 سم) المتجه $\vec{B}$ يمثل إزاحة العربة 5 كم اتجاهة شمال شرق (على الرسم 10 سم) والمقصود هنا شمال الشرق أي أن الزاوية بينهما 45°.

الشكل (9)

حاصل جمع المتجه A ، والمتجه B



وبقياس طول المتجه $\vec{C}$ نجد طوله 14.8cm أي أن المحصلة 7.4km وباستعمال المنقلة نجد أن $\theta = 61.5°$ شمال الشرق.

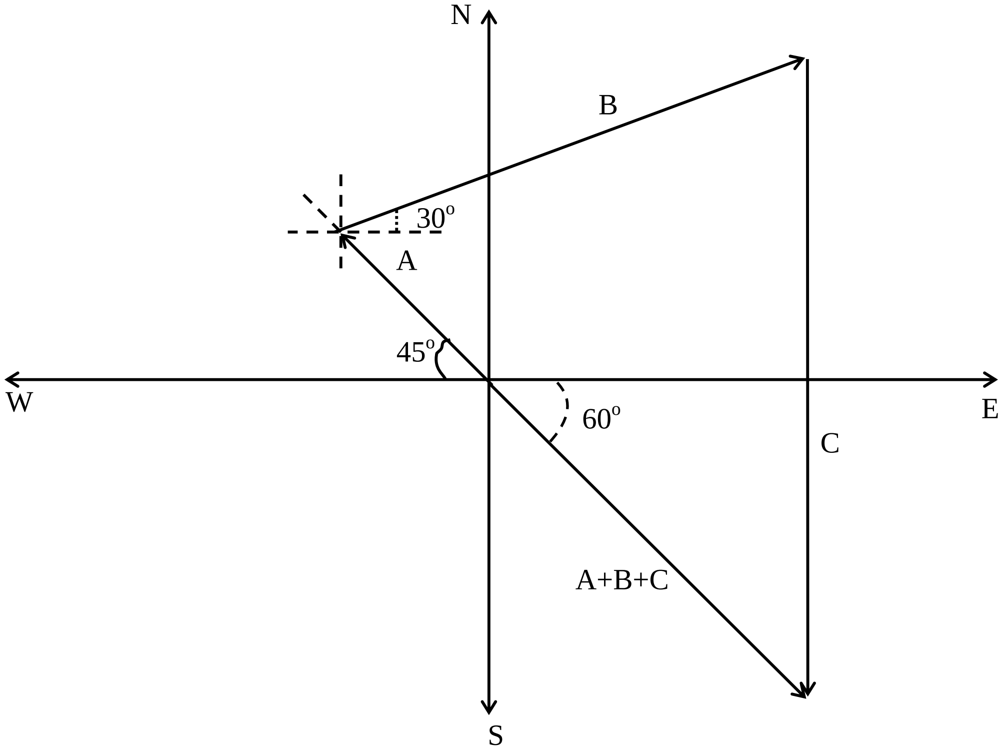
◀◀ مثال (2)

جسيم يتحرك مسافة 10م، في اتجاه الشمال الغربي ثم 20م في اتجاه °30 شمال شرق ثم 35م في اتجاه الجنوب، مثل هذه الإزاحات بالرسم (بيانياً) وحدد محصلة الإزاحة بالرسم.

الحل:

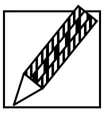
- المتجه A يمثل إزاحة 10م في اتجاه شمال غرب (4سم).
- المتجه B يمثل إزاحة 20م في اتجاه °30 شمال الشرق (8سم).
- المتجه C يمثل إزاحة 35م في اتجاه الجنوب (14سم).

الشكل (10) : A+B+C



نختار مقياس رسم مناسب وليكن كل 5m يمثل في الرسم 2سم وباستخدام المنقلة نحدد الزوايا. وبقياس طول المتجه $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ نجد طوله وباستعمال المنقلة نجد θ حيث طوله يساوي 8.2cm أي أنه يساوي 20.5 م و $\theta = 60°$ جنوب الشرق.

التدريب (1)



جسيم يخضع لثلاث إزاحات متتالية بحيث تكون محصلة الإزاحة صفراً، كانت الإزاحة الأولى 8m باتجاه الغرب والإزاحة الثانية 6m باتجاه الشمال أوجد مقدار واتجاه الإزاحة الثالثة بيانياً.

أسئلة التقويم الذاتي (1)

1. تحرك رجل مسافة 25 كم في اتجاه شمال الشرق، 15كم إلى الشرق، 10كم إلى الجنوب، باستخدام الطريقة البيانية جد محصلة الإزاحة مقداراً واتجاهاً.

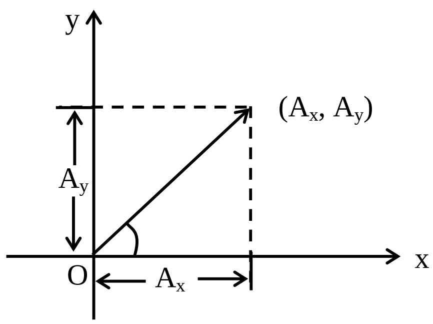
2. اشرح معنى: الكميات المتجهة، والكميات القياسية. واضرب أمثلة فيزيائية على كل منهما.

3. مركبات المتجه Components of a Vector

عزيزي الدارس،

لنفترض أن المتجه $\vec{A}$ يقع في مستوى xy (مستوى الصفحة) وطول هذا المتجه $|\vec{A}|$ويصنع زاوية مقدار θ مع الاتجاه الموجب لمحور x كما في الشكل (11).

الشكل (11)



لنفرض أن إحداثيات رأس المتجه $\vec{A}$ هي (A_x, A_y) أي أن مسقطه على محور x هو A_x ومسقطه على محور y هو A_y فيكون لدينا مثلث قائم الزاوية، وبذلك يكون

بمقدورنا أن نكتب:

$$\sin\theta = \frac{A_y}{A} \quad , \quad \cos\theta = \frac{A_x}{A}$$

أو

$$A_x = A\cos\theta \quad \text{...}(1)$$

$$A_y = A\sin\theta \quad \text{...}(2)$$

أي أن للمتجه A مركبتان $A_x = A\cos\theta$ وهي مركبة المتجه A باتجاه محور x وتسمى (المركبة الأفقية) و $A_y = A\sin\theta$ وهي مركبة المتجه A باتجاه محور y وتسمى (المركبة العمودية).

وبتطبيق نظرية فيثاغورس نحصل على:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad \text{...}(3)$$

أي أن:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{...}(4)$$

ومن شكل (11) نجد أن:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

وهذه الطريقة تسمى بالطريقة التحليلية Analytical Method.

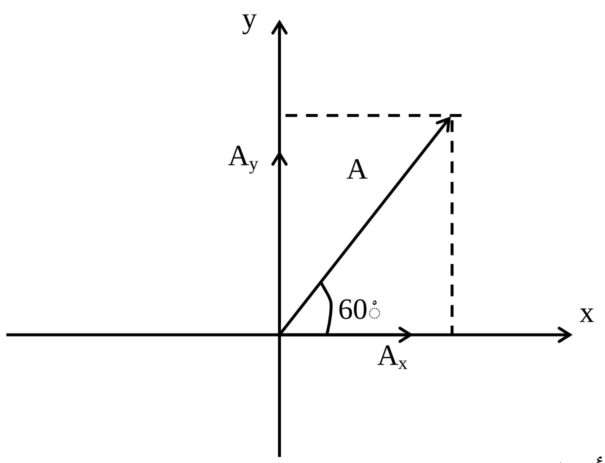
◄◄ مثال (3)

متجه $\vec{A}$ طوله 4 وحدات ويضع زاوية مقدارها $60°$ مع الاتجاه الموجب لمحور x احسب المركبتين الأفقية والعمودية للمتجه $\vec{A}$.

الحل:

نرسم الشكل (12) دون الحاجة لاستخدام المنقلة (رسم توضيحي)

الشكل (12)



المركبة الأفقية A_x

$$A_x = A\cos\theta = 4\cos 60^\circ = 2 \text{ وحدة}$$

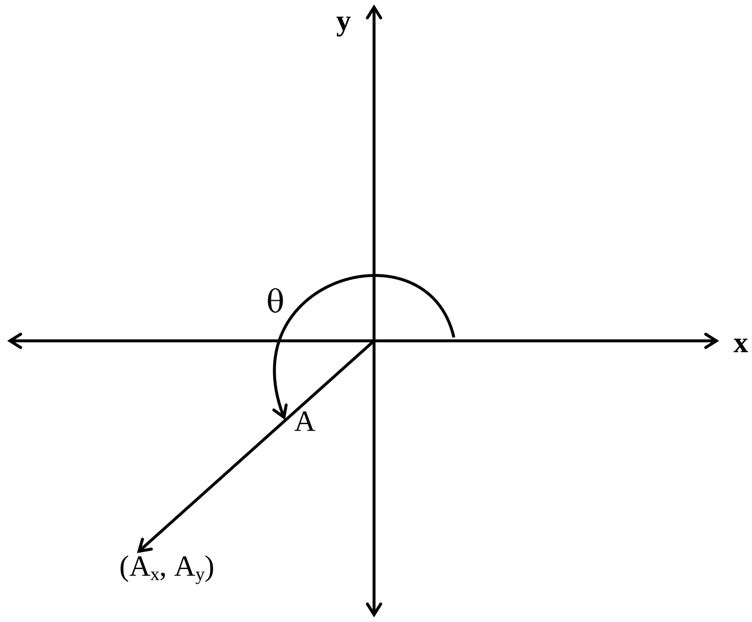
المركبة العمودية A_y

$$A_y = A\sin\theta = 4\sin 60^\circ = 3.46 \text{ وحدة}$$

مثال (4)

إذا كانت المركبة الأفقية للمتجه **A** هي 3− وحدات والمركبة العمودية للمتجه **A** هي 5.2− وحدات أوجد مقدار واتجاه المتجه **A**.

الشكل (13)



الحل:

$A_x = -3$ (وحدة)

$A_y = -5.2$ (وحدة)

A المقدار $= \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

$A = \sqrt{(-3)^2 + (-5.2)^2}$ $A =$ 6 وحدات

الاتجاه: $\tan\theta = \dfrac{Ay}{Ax} = \dfrac{-5.2}{-3}$

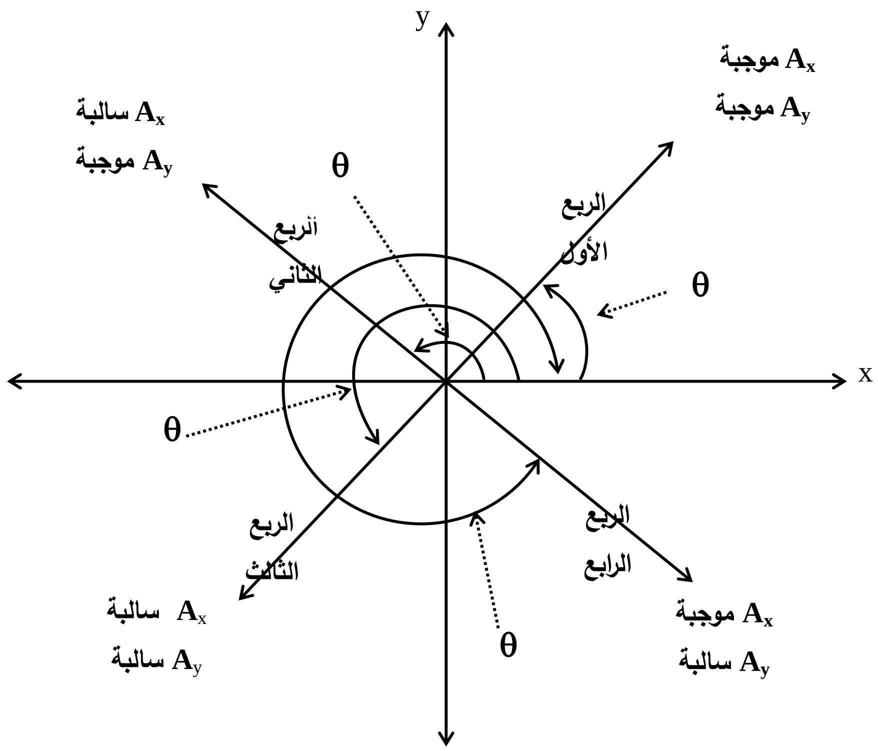
أي أن $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-5.2}{-3} = 240°$

أي أن المتجه **A** يصنع 240ْ مع محور x الموجب (الشكل 13).

لاحظ أن قيمة A_x و A_y سالبتان (الربع الثالث) تبعاً للزاوية θ لذلك يمكن وضع

شكل توضيحي لقيم A_x و A_y (موجب أو سالب) تبعاً للزاوية θ (مقاسة بالنسبة لمحور x الموجب) في أي ربع هي الشكل (14) يبين ذلك.

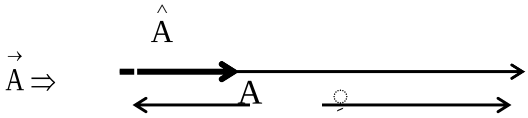
الشكل (14)



4. متجه الوحدة Unit Vector

متجه الوحدة عبارة عن متجه مقداره (طوله) يساوي وحدة واحدة من وحدات الكمية الفيزيائية التي يمثلها ويشير دائماً باتجاه المتجه، فمثلاً المتجه **A** يمكن كتابته على الشكل التالي:

$\vec{A} = A\,\hat{A}$ ....(6)



حيث $\hat{A}$ متجه الوحدة ومقداره يساوي وحدة واحدة، يمكن إعادة كتابة العلامة السابقة على النحو التالي:

$\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{A}$ ....

وتبعاً لهذه العلاقة يمكن إعادة تعريف متجه الوحدة بأنه حاصل قسمة المتجه $\vec{A}$ على مقداره.

وكما سنرى ادناه فان استخدام مفهوم متجه الوحدة مفيد ومريح جدا عند تحليل وجمع وضرب

المتجهات. لقد استخدمنا سابقا الطريقة التحليلية (الشكل 11) حيث تحصلنا على المركبتين A_x و A_y بدلالة الزاوية θ بين المتجه $\mathbf{A}$ والمحور x .

الآن دعنا نعتبر المتجه $\vec{A}$ موجودا في مستوى xy ودعنا نعرف $\hat{i}$ على أنه متجه وحدة موازي لمحور x في اتجاه محور x الموجب، و $\hat{j}$ متجه وحدة في اتجاه محور y الموجب (الشكل 15) ، لذلك نستطيع كتابة المتجه $\vec{A}$ بدلالة مركباته على النحو التالي:

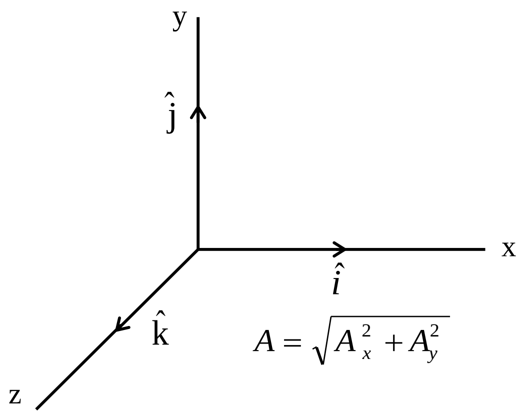
$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j}$ ....(8)

أما في حالة المتجه **A** في الأبعاد الثلاثة (فضاء xyz المتعامدة) نعرف $\hat{k}$ على أنه متجه وحدة في اتجاه محور z الموجب، ويمكن كتابة المتجه A على النحو التالي:

$$\vec{A} = A_x\ \hat{i} + A_y\ j + A_z\ \hat{k} \qquad \text{...(9)}$$

حيث أن $\hat{k}$، $\hat{j}$ ، $\hat{i}$ متجهات الوحدة في الفضاء xyz الشكل (15) (محور z عمودي على مستوى الصفحة).

الشكل (15)



مقدار المتجه **A** المعطى بالمعادلة (8) هو نفسه الذي حصلنا عليه سابقا فس المعادلة (4). أي.

وبنفس الطريقة فان مقدار المتجه $\vec{A}$ في فضاء xyz يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad \text{……………………………………………..(10)}$$

وسنتعرف لاحقا على كيفية الحصول على المعادلة (10) من المتجه (9).

مثال (5)

أوجد قيمة الوحدة للمتجه $A = 6\hat{i} + 8\hat{j}$

A مقدار المتجه $\vec{A} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

$\hat{A}$ مقدار الوحدة $\hat{A} = \dfrac{A}{A} = \dfrac{6\hat{i} + 8\hat{j}}{10} = 0.6\hat{i} + 0.8\hat{j}$

التدريب (2)

المتجه A له المركبات $A_x = 5m$ ، $A_y = -3m$ والمتجه B له المركبات:

$B_x = 11m$ ، $B_y = 1m$

أما المتجه C فله المركبات:

$C_x = -4m$, $C_y = 2m$

فإذا كان $\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C} + 2\vec{D} = 0$

أوجد مركبات المتجه $\vec{D}$ ومتجه الوحدة في اتجاه $\vec{D}$.

مثال (6)

إذا كان المتجه $\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ فجد $\hat{A}$

$\vec{A}$ مقدار المتجه $A = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3$

متجه الوحدة $\hat{A} = \dfrac{A}{A} = \dfrac{2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{3}$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

؟

1. في المثال (6) السابق، هل يمكن اعتبار $\hat{A}$ متجه وحدة؟
2. المتجه $\vec{A}$ يضع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الموجب لمحور x أوجد مركبات المتجه A في الحالات التالية:

(أ) $A = 4m$، $\theta = 30°$

(ب) $\vec{A} = 8m$، $\theta = 150°$

(ج) $A = 6m$، $\theta = 225°$

(د) $A = 5m$، $\theta = 315°$.

3. إذا كان المتجه: $A = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

جد متجه الوحدة في اتجاه A (متجه الوحدة $\hat{A}$).

5. جمع المتجهات بالطريقة التحليلية

Addition of Vectors using Analytical Method

عزيزي الدارس،

مر بنا سابقاً جمع المتجهات بطريقة التمثيل البياني، وبعد أن عرفنا كيفية كتابة المتجه بدلالة مركباته يمكننا إيجاد حاصل جمع المتجهين$\vec{A}$ و $\vec{B}$ ولكن دعنا قبل ذلك نكتب كل متجه على النحو التالي:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k} \quad \ldots\ldots (11)$$

$$\vec{B} = B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k} \quad \ldots\ldots (12)$$

افرض أن:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad \ldots\ldots (13)$$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة العلاقة السابقة على الصورة:

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \quad \ldots\ldots (14)$$

ولكن:

$$\vec{C} = C_x\,\hat{i} + C_y\,\hat{j} + C_z\,\hat{k} \quad \ldots\ldots (15)$$

لذلك تكون مركبات المتجه **C** على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

ولإيجاد حاصل طرح المتجه **A** من المتجه **B** فإن الناتج هو:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\,\hat{i} + (A_y - B_y)\,\hat{j} + (A_z - B_z)\,\hat{k} \quad \ldots\ldots (17)$$

بحيث أن مركبات المتجه C هي:

$$\left.\begin{array}{l} C_x = A_x - B_x \\ C_y = A_y - B_y \\ C_z = A_z - B_z \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

◂◂ مثال (7)

إذا كان $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

جد كل من:

(أ) $\vec{A} + \vec{B}$ (ب) $\vec{A} - \vec{B}$

(جـ) $\left|\vec{A} + \vec{B}\right|$ (د) $\left|\vec{A} - \vec{B}\right|$

(هـ) متجه وحدة في اتجاه $\vec{A} + \vec{B}$.

الحل:

(أ) $\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k} = 3\hat{i} + 3\hat{k}$

(ب) $\vec{A} - \vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

(جـ) $\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

(د) $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

(هـ) $\dfrac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\hat{i} + 3\hat{k}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{\left|\vec{A} + \vec{B}\right|} =$ متجه الوحدة في اتجاه $\vec{A} + \vec{B}$

التدريب (3)

إذا كان $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ ، $\vec{B}=-4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

جد (أ) مقدار كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$

(ب) $3\vec{A}-2\vec{B}$ ،

(ج) $\left|3\vec{A}-2\vec{B}\right|$ ،

(د) متجه الوحدة في اتجاه $\vec{A}-2\vec{B}$.

مثال (8)

إذا كان

$\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{C}=\hat{i}-\hat{j}$

جد الثوابت التالية s, t, r بحيث أن:

$$4\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k}=s\vec{A}+t\vec{B}+r\vec{C}$$

الحل:

$$4\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k}=s\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)+r\left(\hat{i}-\hat{j}\right)$$

$$4\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k}=(s+t+r)\hat{i}+(s+t-r)\hat{i}+(s-t)\hat{k}$$

نقارن معامل كل متجه على حده:

$4=s+t+r$ ....(1)

$6=s+t-r$ ....(2)

$-1=s-t$ ....(3)

نجمع المعادلة (1) مع المعادلة (2) فنحصل على:

$10=2s+2t$

أو:

$5=s+t.$ ....(4)

نجمع معادلة (4) مع معادلة (3) فنحصل على:

$4=2s+0t$

أي: $4=2s$ ومنها $s=2$

نعوض قيمة s في المعادلة (3) فنجد:

$-1=2-t \Rightarrow t=3$

ومنها نجد r من معادلة (1) التي تصبح :

$4=2+3+r \quad \Rightarrow r=-1$

مثال (9)

إذا كان مقدار المتجه $\vec{A}$ يساوي 4م ويصنع زاوية 30° مع محور x الموجب ومقدار المتجه B يساوي 2م ويصنع 120° من محور x الموجب الشكل (16) جد:

(أ) $\vec{A}+\vec{B}$ ، (ب) $\vec{A}-\vec{B}$ ، (جـ) $|\vec{A}+\vec{B}|$ ، (د) متجه وحدة في اتجاه $\vec{A}-\vec{B}$.

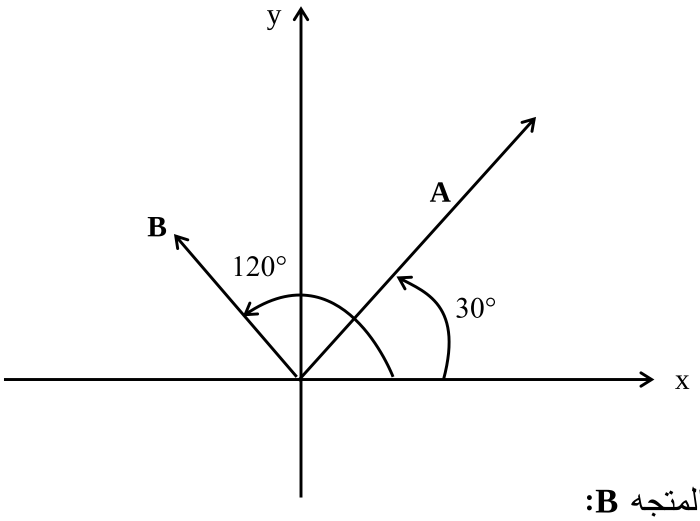
الحل:

المتجه $\vec{A}$

$A_x = A\cos\theta = 4\cos 30^\circ = 3.46$ م

$A_y = A\sin\theta = 4\sin 30^\circ = 2$ م

$\vec{A} = Ax\,\hat{i} + Ay\,\hat{i} = 3.46\hat{i} + 2\hat{j}$ م



المتجه **B:**

$B_x = 2\ \mathrm{Cos}\ 120^\circ = -1\,\mathrm{m}$

$B_y = 2\,\mathrm{Sin}\ 120^\circ = 1.73\ \mathrm{m}$

$\vec{B} = -\hat{i} + 1.73\,\hat{j}$

(أ) $\vec{A} + \vec{B} = 2.46\,\hat{i} + 3.73\,\hat{i}$

(ب) $\vec{A} - \vec{B} = 4.46\,\hat{i} + 0.27\,\hat{j}$

(جـ) $\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{(2.46)^2 + (3.73)^2} \quad = 4.47\,\mathrm{m}$

(د) متجه وحدة في اتجاه $\vec{A} - \vec{B}$ $= \dfrac{\vec{A} - \vec{B}}{\left|\vec{A} - \vec{B}\right|} = \dfrac{4.46\hat{i} + 0.27\hat{j}}{\sqrt{(4.46)^2 + (0.27)^2}}$

$$= \frac{4.46\,\hat{i} + 0.27\,\hat{j}}{4.47}$$

مثال (10)

إذا كان $\vec{A}=3\,\hat{i}-4\,\hat{j}$ $\qquad$ $\vec{B}=1\,\hat{i}+3\,\hat{j}$

أوجد حاصل جمع المتجهين A, B مقداراً واتجاهاً.

الحل: نفرض أن المتجه **C** هو حاصل جمع المتجهين, أي:

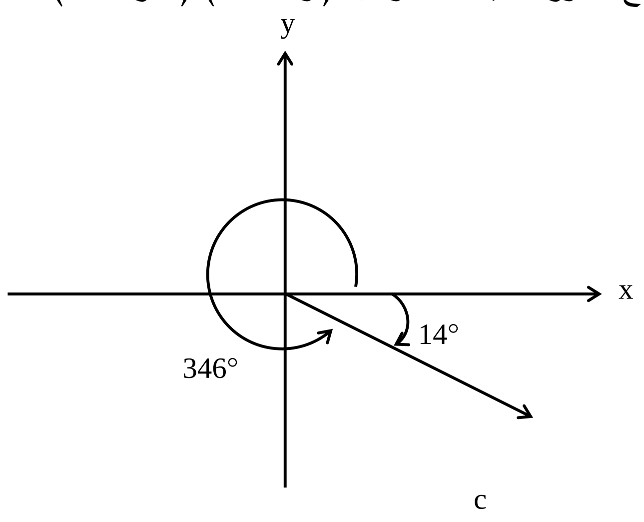
$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \qquad =4\,\hat{i} - \hat{j}$$

مقدار المحصلة $C=\sqrt{(4)^2+(-1)^2} \qquad = \sqrt{17}$

اتجاه المحصلة $\tan\theta=\dfrac{C_y}{C_x}=\dfrac{-1}{4}$

تذكر أن مركبة C_x موجبة ومركبة C_y سالبة لذلك نحن في الربع الرابع، وبالتالي نحصل على:

$\theta=346°$ مع محور السينات الموجب (أو $-14°$) (فسر ذلك؟)



مثال (11)

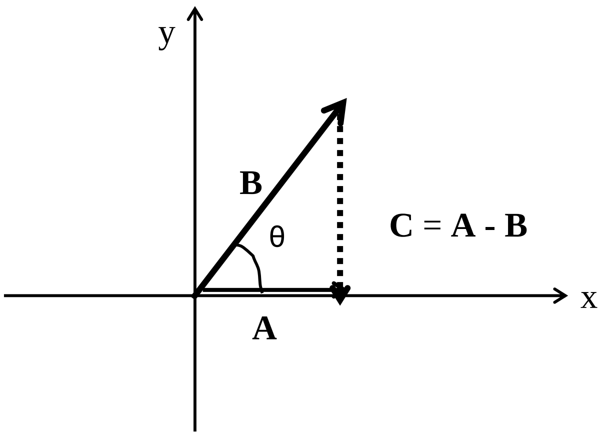
إذا كانت الزاوية بين المتجهين **A,B** هي θ في الشكل (17), فأثبت أن:

$$|A-B| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

الحل:

نفرض أن: $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$

الشكل (17)



مركبات المتجه **A**

$$A_x = A\cos 0 = A$$
$$A_y = A\sin 0 = 0$$
$$\vec{A} = A\hat{i} + 0\hat{j} = A\hat{i}$$

مركبات المتجه **B**

$$B_x = B\cos\theta$$
$$B_y = B\sin\theta$$
$$\vec{B} = B\cos\theta\,\hat{i} + B\sin\theta\,\hat{j}$$

لذلك يكون المتجه **C**

$$\vec{C}=(A-B\cos\theta)\hat{i}-B\sin\theta\,\hat{j}$$

أو

$$\vec{C}=C_x\,\hat{i}+C_y\,\hat{j}$$

ومقدار المتجه C يساوي:

$$C=|\vec{C}|=\sqrt{C_x^{\,2}+C_y^{\,2}}=\sqrt{(A-B\cos\theta)^2+(-B\sin\theta)^2}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{A^2-2AB\cos\theta+B^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{A^2-2AB\cos\theta+B^2\left(\cos^2\theta+\text{Sin}^2\theta\right)}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}$$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

؟

1. إذا كان $\vec{A}$ يمثل إزاحة مقدارها 2م باتجاه يضع °45 مع الاتجاه الموجب لمحور x وكانت $\vec{B}$ تمثل إزاحة مقدارها 4م بالاتجاه الموجب لمحور y أوجد باستخدام طريقة تحليل المركبات:
(أ). $\vec{A}+\vec{B}$، (ب) $\vec{A}-\vec{B}$، (جـ) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$ ، (د) $3\vec{A}-\vec{B}$.
2. متجه مركبته على محور x هي 15m- ومركبتة على محور y هي 45m أوجد مقدار واتجاه هذا المتجه.

6. ضرب المتجهات Multiplication of Vectors

1.6 مقدمة

عزيزي الدارس ..

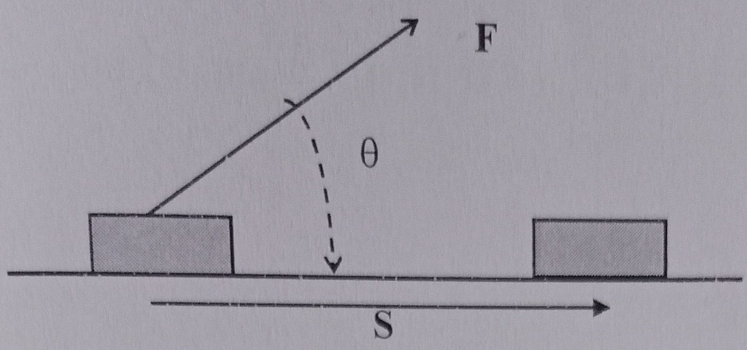
عرفنا في بداية هذه الوحدة ان مفهوم المتجهات كان ضروريا للتمييز بين الكميات الفيزيائية التي تتأثر بتغير الاتجاه والكميات الفيزيائية القياسية التي لا يلعب الاتجاه دوراً في تحديد قيمتها وتسمى ايضا بالكميات العددية وكل الأعداد العادية المعروفة هي كميات قياسية.

ولنفس السبب نجد ايضا في الفيزياء ان هناك طريقتان لضرب المتجهات. الطريقة الاولى يكون ناتجها كمية فيزيائية قياسية عند ضرب متجهين في بعضهما ويسمى هذا النوع من الضرب **بالضرب القياسي**. وفي النوع الثاني من الضرب نحصل على متجه عند ضرب متجهين في بعضهما ويسمى هذا النوع من الضرب **بالضرب الاتجاهي**.

وكمثال لكمية قياسية تنتج من ضرب متجهين **الشغل** (وبالتالي الطاقة) الذي هو كمية قياسية ولكنه ناتج عن ضرب متجه القوة **F** في متجه الازاحة **S** (راجع الفيزياء العامة 2 – الوحدة الثالثة و الوحدة الخامسة في هذا المقرر):

$$W = \vec{F} \bullet \vec{S}$$

هذا يدعو لاستنتاج قاعدة لضرب المتجهات بحيث تكون نتيجة الضرب كمية قياسية. نلاحظ ان القوة **F** لاتنتج شغلا اذا كانت عمودية على اتجاه حركة الجسم بينما نحصل على اقصى قيمة للشغل عندما تكون القوة في نفس اتجاه الازاحة **S** (انظر الشكل).



شكل (19)

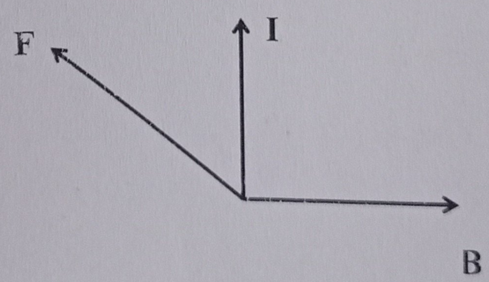
من الشكل (19) واضح ان:

$$W = \vec{F} \bullet \vec{S} = |F||S|\cos(\theta)$$

وبالتالي نحصل على اقصى قيمة للشغل عندما تكون θ = صفر (انظر ايضا الشكل (1) في الوحدة الخامسة والنص المصاحب للشكل).

لاحظ ان هذا الضرب القياسي **scalar product** يسمى ايضا بالضرب العددي ولوجود النقطة بين المتجهين (انظر المعادلة 19) يسمى ايضا **dot product**.

وكمثال لمتجهين ينتج عن ضربهما متجها ثالثا, متجه القوة **F** الناتج عن مرور تيار كهربي **I** في سلك عمودي على مجال مغنطيسي كثافة فيضه **B** كما في الشكل.



ولقد عرفنا في الوحدة السابعة في الفيزياء العامة 2 ان اقصى قيمة لهذه القوة تكون عندما يتعامد التيار على المجال المغنطيسي وان هذه القوة تصبح صفرا عندما تكون الزاوية بين **I** و **B** صفرا. بناء على ذلك فان

$$F = I\,B\sin(\theta) \tag{20}$$

ولذلك فان ضرب أي متجهين ينتج عنه متجه (عمودي على الاثنين) يسمى بالضرب الاتجاهي vector product او المتجهي ويكتب كالاتي:

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$$

ونحصل على القيمة العددية للمتجه من المعادلة (20). ويسمى هذا الضرب ايضا cross product ولذلك يسمى بالعربية احيانا بالضرب التقاطعي.

في مايلي سنتعرف بالتفصيل على كل من الضرب القياسي والضرب الاتجاهي .

2.6 حاصل الضرب القياسي

The Scalar Product (Dot Product)

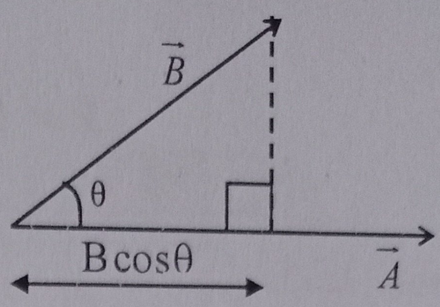
عزيزي الدارس،،

عرفنا في ما سبق (المعادلة 19) أن حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ (يكتب $\vec{A}.\vec{B}$ وينطق A dot B) هو العدد الناتج من ضرب مقدار المتجه $\vec{A}$ في مقدار المتجه B في جيب تمام الزاوية بينهما θ (الشكل 17). ويمكن كتابته بالصيغة الرياضية التالية:

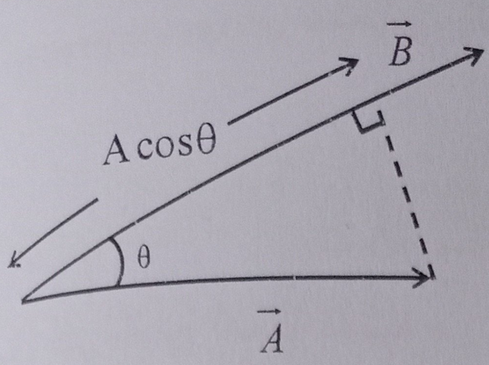
$$\vec{A}.\vec{B} \equiv AB\cos\theta$$

أي أن $B\cos\theta$ هي مركبة المتجه B في اتجاه A الشكل (18 – أ) وفي نفس الوقت $A\cos\theta$ هي مركبة المتجه A في اتجاه B الشكل (18 – ب).

يلي:



(18- أ)



(18- ب)

حالة خاصة:

اذا ضرب المتجه A في نفسه ضرباً قياسياً $(\theta = 0)$ فإننا نجد أن:

$$\vec{A}.\vec{A} = AA\cos\theta = A^2$$

ولان:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k} \quad \text{.......} \quad (11)$$

ومن تعريف حاصل الضرب القياسي واضح أنه إذا اضربنا متجه الوحدة في نفسه ولان$(\theta = 0)$ فإن الناتج يكون:

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \quad \text{.......} \quad (21)$$

بينما إذا ضربت متجهات الوحدة فيما بينها ولان $(\theta = 90°)$ يكون الناتج صفرا اي:

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = 0 \quad \text{.......} \quad (22)$$

ولذلك من (11) و(21) و(22) نجد ان:

$$\vec{A}.\vec{A} = (A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}).(A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}) = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad . \quad (23)$$

أي نحصل على نفس النتيجة السابقة في المعادلة (10):

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (10)$$

وعموما نستطيع كتابة حاصل الضرب القياسي بدلالة مركبات المتجه **A** والمتجه **B** كما يلي:

$$\vec{A}.\vec{B}=\left(A_x\ \hat{i}+A_y\ \hat{j}+A_z\ \hat{k}\right).\left(B_x\ \hat{i}+B_y\ \hat{j}+B_z\ \ \hat{k}\right)$$

$$=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z \quad \text{.......} (24)$$

أو

$$AB\cos\theta=A_x\ B_x+A_y B_y+A_z B_z$$

$$\cos\theta=\frac{A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z}{A\ .\ B} \quad \text{.......} (25)$$

ومن هذه العلاقة نستطيع إيجاد الزاوية θ

ويمكن بكل سهولة إثبات أن:

$$\vec{A}\ .\ \vec{B}=\vec{B}\ .\ \vec{A} \quad \text{.......} (26)$$

أي ان **حاصل الضرب القياسي تبادلي** وأيضاً **تشاركي** حيث

$$\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=A.\ B+A.\ C \quad \text{.......} (27)$$

مثال (12)

إذا كان مقدار المتجه A يساوي 6 وحدات، ومقدار المتجه B يساوي 5 وحدات والزاوية بينهما تساوي 120° جد A.B:

الحل:

$$\vec{A}\ .\ \vec{B}=AB\cos\theta=(6)\ (5)\ \cos 120^{\circ}=-15\,(\text{وحدة})^{2}$$

مثال (13)

إذا كان:

$$\vec{B}=\frac{1}{2}\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{A}=8\ \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$$

احسب: $\vec{A}.\ \vec{B}$

الحل:

$$\vec{A}\,.\,\vec{B}=\left(8\,\hat{i}-2\mathrm{j}+3\mathrm{k}\right).\left(\frac{1}{2}\,\hat{i}+2\hat{\mathrm{j}}+\hat{\mathrm{k}}\right)=4-4+3=3$$

◄◄ مثال (14)

ما هي الزاوية بين المتجهين $\vec{A}=3\,\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ، $\vec{B}=2\hat{i}+14\hat{j}+5k$

الحل:

مقدار المتجه $\vec{A}$ $\quad A=\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-4)^2}=\sqrt{26}$

مقدار المتجه $\vec{B}$ $\quad B=\sqrt{(2)^2+(14)^2+(5)^2}=\sqrt{225}$

زاوية θ $\quad \cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}=\frac{(3)(2)+(1)(14)+(-4)(5)}{\sqrt{26}\ \sqrt{225}}$

$$\cos\theta=\frac{6+14-20}{\sqrt{26}\ \sqrt{225}}=0$$

أي أن $\theta=90°$ أو أن المتجه $\vec{A}$ والمتجه $\vec{B}$ متعامدان $\left(\vec{A}.\,\vec{B}=0\right)$

◄◄ مثال (15)

احسب الزاوية بين المتجهين $\vec{A}=\hat{i}-\hat{k}$ ، $\vec{B}=-\hat{j}+\hat{k}$

الحل:

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}=\frac{0+0+(-1)}{\sqrt{2}\ \sqrt{2}}=\frac{-1}{2}$$

أي أن $\theta=120°$

التدريب (4)

إذا كان المتجه $\vec{A}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ، والمتجه $\vec{B}=3\hat{i}-4\hat{k}$

جد: (أ) مقدار $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ (ب) الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

مثال (16)

إذا كان $\vec{A}=-3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ ، $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

فجد مركبة المتجه $\vec{A}$ في اتجاه المتجه $\vec{B}$.

الحل:

$$A\cdot B=B(A\cos\theta)$$

أو

$$A\cos\theta=\frac{A\cdot B}{B}=\frac{-3+1+4}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال (17)

إذا كان مقدار المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ على التوالي 5 وحدات و 6 وحدات والزاوية بينهما 60°

جد $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$.

الحل:

افرض $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

اضرب $\vec{C}$ في نفسه ضرباً قياسياً.

$$\vec{C}\cdot\vec{C}=C^2=(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

أو

$$C=\sqrt{(A+B)\cdot(A+B)}$$

$$C=\sqrt{A\cdot A+A\cdot B+B\cdot A+B\cdot B}$$

$$=\sqrt{A^2+B^2+2A+2A\cdot B}=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

$$C=\sqrt{(5)^2+(6)^2+2(5)(6)\cos 60\cdots=}\ \sqrt{91}$$

عزيزي الدارس،،

في المثال السابق احسب $\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$.

التدريب (5)

جد قيمة a بحيث يكون المتجه $\vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}+a\hat{k}$ عمودياً على المتجه $\vec{B}=\hat{i}+7\hat{j}+\hat{k}$.

مثال (18)

أوجد قيمة a بحيث يكون المتجه $\vec{A}=a\hat{i}-6\hat{j}$ عمودياً على المتجه $\vec{B}=3\hat{i}+2\hat{j}$.

الحل:

المتجهان متعامدان أي أن:

$$A\cdot B=0 \Rightarrow \left(a\,\hat{i}-6\hat{j}\right)\cdot\left(3\hat{i}+2\hat{j}\right)=0$$

$$3a-12=0 \Rightarrow a=4$$

مثال (19)

تؤثر قوة ثابتة $\vec{F}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ على جسيم، فإذا كانت إزاحته $\vec{r}=20\hat{i}+15\hat{j}-7\hat{k}$ احسب الشغل الذي تبذله تلك القوة على الجسم.

الحل:

$$W=\vec{F}\cdot\vec{r}=\left(\hat{i}+2j+3k\right)\cdot\left(20\hat{i}+15\hat{j}-7\hat{k}\right)=20+30-21=29\,\text{N.m}$$

التدريب (6)

أ. إذا كانت القوة المؤثرة على جسم هي $F=\hat{i}7+5\hat{j}$ فأحدثت فيه إزاحة $r=\hat{i}3-4\hat{j}$ جد الشغل الذي تبذله هذه القوة.

ب. إذا كان المتجه $A=A_x\hat{i}+A_y\hat{i}+A_z\hat{k}$ أثبت أن:

$$\left(\vec{A}.\hat{i}\right)\hat{i}+\left(\vec{A}.j\right)j+\left(\vec{A}.\hat{k}\right)\hat{k}=\vec{A}$$

جـ. أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{A}=a\hat{i}+2a\hat{i}$ ، $\vec{B}=a\hat{i}+2a\hat{i}+3a\hat{k}$ حيث a ثابت.

أسئلة التقويم الذاتي (4)

؟

1. احسب الزاوية بين المتجهين $\vec{A}=\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ، $\vec{B}=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

2. إذا كان المتجه $A=4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ والمتجه $B=\hat{i}-2\hat{j}$

أوجد:

(أ) مركبة المتجه $\vec{A}$ في اتجاه المتجه $\vec{B}$.

(ب) مركبة المتجه $\vec{B}$ في اتجاه المتجه $\vec{A}$.

(جـ) الزاوية بين المتجهين.

3.6 حاصل الضرب الاتجاهي

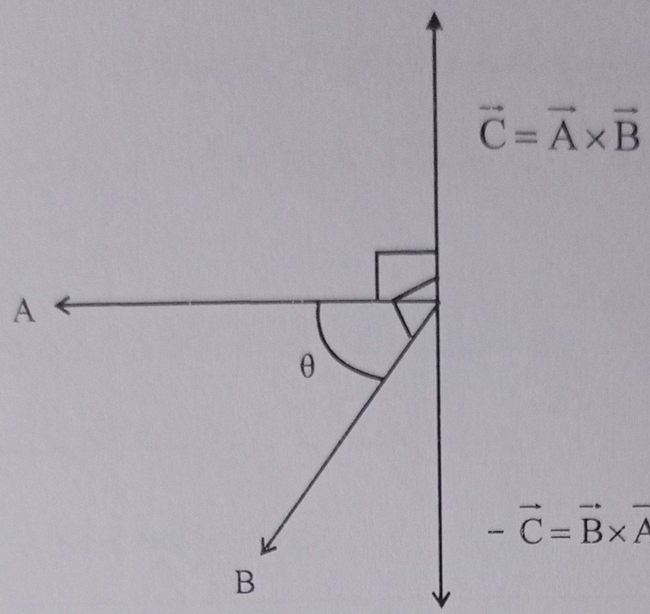
The Vector Product (Cross Product)

عزيزي الدارس،

هنالك حاصل ضرب آخر للمتجهين نجده على نطاق واسع في الفيزياء، وحاصل الضرب هذا اتجاهيا وليس قياسياً في طبيعته، ويعرف

حاصل الضرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$ (ينطق (A Cross B)) **هو متجه عمودي على المستوى الذي يحتوي على المتجهين A و B** كما في الشكل (19) ومقداره $A\,B\sin\theta$.

الشكل (19)



$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta\,\hat{C} \quad \text{.......} \quad (29)$$

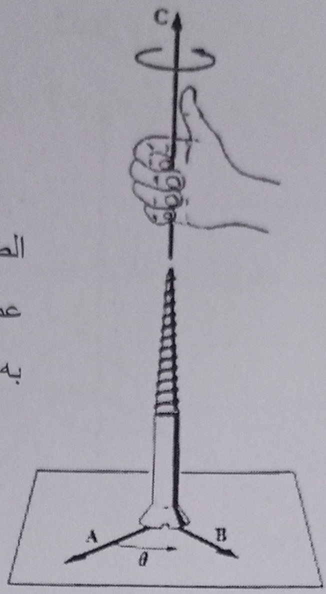
حيث $\hat{C}$ متجه وحدة في اتجاه المتجه $\vec{C}$ ويحدد اتجاه المتجه $\vec{C}$ بقاعدة سن اللولب كالتالي:

يدار المتجه $\vec{A}$ الموجودة في الخانة الأولى من حاصل الضرب بأقل زاوية تحقق تطابقه مع اتجاه $\vec{B}$، وعندئذ يكون اتجاه المتجه $\vec{C}$ هو اتجاه حركة لولب ذو سن يميني عندما يدار في نفس اتجاه المتجه كما هو مبين في الشكل (20).

وهنالك طريقة أخرى لتحديد اتجاه المتجه C هي كما يلي:

أدر أصابع يدك اليمنى في الاتجاه الذي أدير فيه المتجه $\vec{A}$ عندئذ سوف يشير الإبهام إلى اتجاه $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ والمتجه C عمودي على هذا المستوى، أي أن المتجه $\vec{C}$ عمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ الشكل (20).

المتجـه $\vec{C}$ النـاتج عـن الضـرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$ يكون عموديا على المستوى الذي يوجد به كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$



الشكل (20)

لاصـطلاحات الإشـارات أن $\vec{A}\,X\,\vec{B}$ هـو متجـه إشـارته عكس إشـارة المتجـه $\vec{A}\times\vec{B}$ الشكل (19) أي أن:

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \quad \text{.........................} (30)$$

وهذه العلاقة تشير إلى أن حاصل الضرب المتجه غير متبادل، (anti Commutative)

وبحسب تعريف الضرب الاتجاهي فإن ضرب المتجه بنفسه $(\theta=0°)$ يساوي:

$$\vec{A}\times\vec{A}=A^{2}\sin(0)=0 \quad \text{.........................} (31)$$

وبنفس الطريقة إذا ضربت متجهات الوحدة $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ بنفسها ضرباً اتجاهياً فإنها تعطي العلاقة التالية:

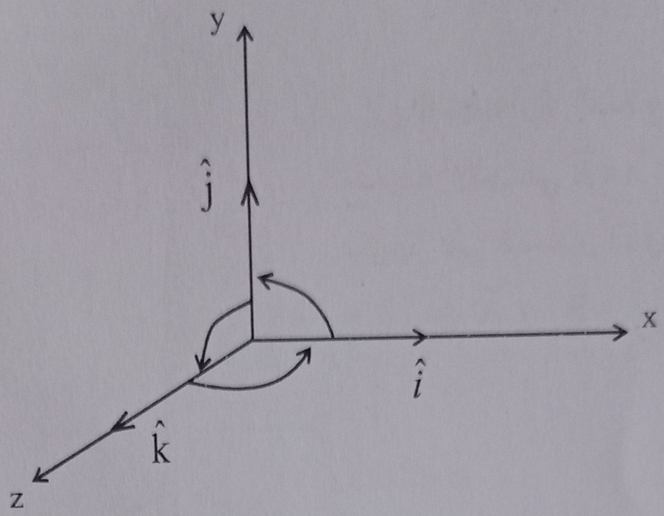
$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0 \quad \text{.........................} (32)$$

لإيجاد حاصل ضرب متجهات الوحدة فيما بينها فإننا نستعين بقاعدة اليد اليمنى وبالشكل (21).

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

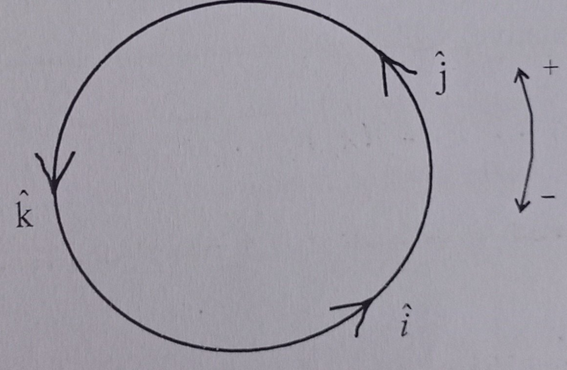
$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i},\ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j} \quad \text{.........................} (33)$$

الشكل (21)



نتذكر هذه النتائج بسهولة ونرسم دائرة صغيرة {الشكل (22)} ونرتب $\hat{i}\,,\hat{j}\,,\hat{k}$ ضد عقارب الساعة، وبالقراءة من الدائرة بعكس عقارب الساعة نحصل على إجابات موجبة فمثلاً $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ بينما إذا تحركنا مع عقارب الساعة فإننا نحصل على إجابات سالبة $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ وهكذا:

الشكل (22)



وبالاستفادة من هذه النتائج يمكن إيجاد تعريف آخر لحاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين A و B بدلالة مركبات كل منهما حيث:

$$\overline{A}\times\overline{B}=\left(A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k}\right)\times\left(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k}\right)$$

$$=0+A_x B_y\,\hat{k}-A_x B_z\,\hat{j}-A_y B_x\,\hat{k}+0+A_y B_Z\,\hat{i} \qquad (34)$$

$$+A_z B_x\,\hat{j}-A_z B_y\,\hat{i}+0\ldots$$

أو

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=\left(A_y\,B_z-A_z\,B_y\right)\hat{i}+\left(A_z\,B_x-A_x\,B_z\right)\hat{j}$$
$$+\left(A_x\,B_y-A_y\,B_x\right)\hat{k}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

وهذه النتيجة يمكن التعبير عنها بطريقة المحددات حيث نكتب:

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

ويمكن فك هذه المحددة كما يلي:

نبدأ بأخذ وحدة المتجه ثم نشطب الصف والعمود الذي يظهر فيهما؛ ونضرب عناصر المحددة المتبقية قطرياً ونحسب الفرق بينهما.

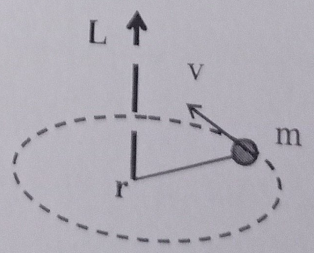
مع الأخذ بنظر الاعتبار وضع إشارة سالب قبل المتجه $\hat{j}$ عند فك المحددة.

$$\overline{A}\times\overline{B}=\hat{i}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}$$
$$=\hat{i}\left(A_y\,B_z-A_z\,B_y\right)-\hat{j}\left(A_x\,B_z-A_z\,B_x\right)+\hat{k}\left(A_x\,B_y-A_y\,B_x\right)$$
$$=\hat{i}\left(A_y\,B_z-A_z\,B_y\right)+\hat{j}\left(A_Z\,B_X+A_X\,B_Z\right)+\hat{k}\left(A_x\,B_y-A_y\,B_x\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(37)$$

ومن الأمثلة الفيزيائية على حاصل الضرب المتجه (كمية التحرك الزاوي) (Angular Momentum) ويرمز له بالرمز L ويعطى بالعلاقة:

$$\overline{L}=\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{\upsilon}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

حيث p هو كمية التحرك الخطي للجسم (m v) و r هي متجه الموضع،



يكون اتجاه كمية التحرك الزاوي **L** إلى اعلى هندما تكون الحركة عكس اتجاه حركة عقارب الساغة والى اسفل في حالة الحركة في اتجاه حركة عقارب الساعة.

التدريب (7)

جسم كتلته 3kg وجد أن سرعته $\vec{V}=2\hat{i}+3\hat{i}+5k \quad m/s$ وكان موضعه $r=3\hat{i}-2\hat{i}+k \quad m$ جد الزخم الزاوي للجسم حول نقطة الأصل.

وهناك **تطبيق هندسي مهم للضرب المتجه** وهو إيجاد مساحة متوازي الأضلاع أو مثلث في فضاء، فلو كان لدينا A و B متجهين، والزاوية بينهما θ على أن يكون المتجه A والمتجه B ممثلين لضلعين متجاورين في الشكل (23).

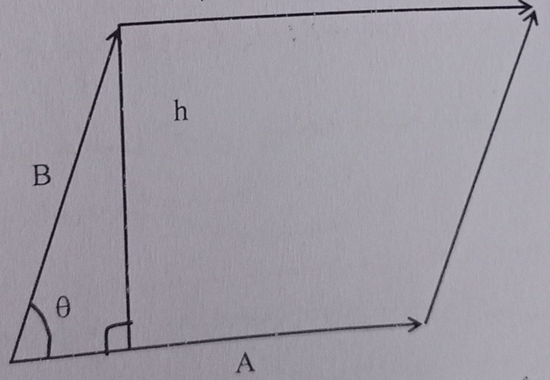
تعلم أن مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع= $h \times A$

ولكن $\sin\theta=\dfrac{h}{B}$ أو $h=B\sin\theta$

مساحة متوازي الأضلاع = $AB\sin\theta$ ....(39)

$=|A\times B|$

الشكل (23)



أي أن مساحة متوازي الأضلاع هي مقدار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين A و B $(|A\times B|)$ أما بالنسبة لمساحة المثلث فهي تعطى بالعلاقة التالية:

(مساحة المثلث) = $\dfrac{1}{2}$ (مساحة متوازي الأضلاع)

(40) .... = مساحة المثلث $\frac{1}{2}|A\times B|$

◄◄ مثال (20)

إذا كان $A=2\hat{i}+6\hat{j}-27\hat{k}$ ، $B=\hat{i}+3\hat{j}-\frac{27}{2}\hat{k}$

أوجد قيمة $\vec{A}\times\vec{B}$

الحل:

$$A\times B=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 6 & -27 \\ 1 & 3 & \frac{-27}{2} \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\begin{vmatrix} 6 & -27 \\ 3 & \frac{-27}{2} \end{vmatrix} -\hat{j}\begin{vmatrix} 2 & -27 \\ 1 & \frac{-27}{2} \end{vmatrix} +\hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[(6)\left(\frac{-27}{2}\right)-(-27)(3)\right]-\hat{j}\left[(2)\left(\frac{-27}{2}\right)-(-27)(1)\right]$$

$$+\hat{k}\,[(2)(3)-(6)(1)] =\hat{i}\,(-81+81)-\hat{j}\,(-27+27)+k(6-6)$$

$$=0\hat{i}-0\hat{j}-0\hat{k}=0$$

$A\ B\sin\theta=0$ أو $\vec{A}\times\vec{B}=0$

أي أن $\theta=0°$ أو $\theta=180°$

أي أن المتجه A والمتجه B متوازيان $(\theta=0)$ أو متعاكسان $(\theta=180°)$.

وبالجدير بالإشارة هنا ان أي متجهين يكونان متوازيين فقط إذا كان $\vec{A}=n\vec{B}$

حيث n ≠ صفر، وفي هذا المثال كان $\vec{A}=2\vec{B}$.

◄◄ مثال (21)

جد متجهاً يعامد المتجهين $\vec{A}=7\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$ و $\vec{B}=-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

الحل:

إن حاصل الضرب للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو متجه جديد $\vec{C}$ عمودي على كليهما.

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 7 & -4 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\,[(-4)(1)-3(1)]-\hat{j}[7(1)-3(-1)]+\hat{k}\,[7(1)-(-4)(-1)]$$

$$=-7\hat{i}-10\,\hat{j}+3\hat{k}$$

نشاط:

(أ) تحقق من أن المتجه $\vec{C}$ عمودي على المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ $(\vec{A}.\vec{C}=\vec{B}.\vec{C}=0)$.

(ب) جد قيمة متجه وحدة $(\hat{C})$ بحيث يكون عمودي على المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

◄◄ مثال (22)

احسب قيمة a و b التي تجعل المتجهين $\vec{A}=2\hat{i}+a\,\hat{j}+4\hat{k}$ والمتجه $\vec{B}=b\hat{i}-3\,\hat{j}+6\hat{k}$ متوازيان.

الحل:

متوازيان أي أن $\vec{A}\times\vec{B}=0$.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & a & 4\\ b & -3 & 6\end{vmatrix}=0$$

$$=\hat{i}\,(ba-(-3)(4))-\hat{j}(12-4b)+\hat{k}(-6-ab)$$

أي أن:

$$6a+12=0 \quad \text{أي أن} \quad a=-2$$

$$12-4b=0 \quad \text{أي أن} \quad b=3$$

وفي حالة $\hat{k}$ $\quad -6-ab=0$ أي أن $-6-(-2)(3)=0$

التدريب (8)

> احسب قيمة كل من a، b إذا كان المتجهان $\vec{A}=2\hat{i}+6\hat{j}-27\hat{k}$، $\vec{B}=\hat{i}+a\hat{j}+b\hat{k}$ متوازيان.

مثال (23)

احسب مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجه $\vec{A}$ والمتجه $\vec{B}$، حيث أن $\vec{A}=3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ و $\vec{B}=\hat{i}-6\hat{k}$

الحل:

مساحة متوازي الأضلاع $=|\vec{A}\times\vec{B}|$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(24-0)-\hat{j}(-18-5)+\hat{k}(0-(-4))$$

$$=24\hat{i}+23\hat{j}+4\hat{k}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{(24)^2+(23)^2+(4)^2}$$

$$=\sqrt{1121}\quad=33.48$$

◂◂ **مثال (24)**

جد الزاوية بين المتجهين: $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j}$ ، $\vec{B} = \hat{j} + \hat{k}$

الحل:

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin \theta$$

أو

$$\sin \theta = \frac{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-1-0) - \hat{j}(1-0) + \hat{k}(1-0)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

من المعطيات:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(1)^1 + (-1)^1} = \sqrt{2}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

أي أن

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\ \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أي أن $\theta = 120°$

تحقق من هذا الجواب باستخدام الضرب القياسي (A . B). لاحظ أن $\theta \neq 60°$ لأن مركبة A_y سالبة.

◄◄ مثال (25)

جسيم كتلته 2 كغم وجد أن سرعته $\vec{v}=2\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ عندما كان عند موضع $\left(\vec{r}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right)$ أوجد كمية التحرك الزاوي للجسيم بالنسبة لنقطة الأصل.

الحل:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v}$$

$$\vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(4-3) - \hat{j}\,(-2-2) + \hat{k}(3-(-4))$$

$$\vec{r}\times\vec{v} = \hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}$$

أي أن

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = 2\left(\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}\right)$$

$$\vec{L} = 2\hat{i}+8\hat{j}+14\hat{k} \quad \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

أسئلة التقويم الذاتي (5)

؟

1. المتجهان: $\vec{A}=3\hat{i}+4\hat{j}$ ، $\vec{B}=\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$. جد:
(أ) $\vec{A}\times\vec{B}$ (ب) $\vec{B}\times\vec{A}$، (ج) متجه وحدة عمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$.
2. أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجه $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ والمتجه $\vec{B}=-6\hat{j}+5\hat{k}$.
3. أثبت أنه إذا كان حاصل جمع المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ يساوي صفراً $(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0)$ فإن $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{C}=\vec{C}\times\vec{A}$ (تلميح: عوض عن $\vec{B}$ بدلالة $\vec{A}$ ، $\vec{C}$ أي أن $(\vec{A}\times(-\vec{A}-\vec{C})$)

4.6 حاصل الضرب القياسي الثلاثي

Triple Scalar Product

عزيزي الدارس،

مر بنا أن حاصل الضرب الاتجاهي بين المتجهين **B** و **C** يعرف على الصورة التالية:

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(B_y C_z - B_z C_y\right) - \hat{j}\left(B_x C_z - B_z C_x\right) + \hat{k}\left(B_x C_y - B_y C_x\right) \quad \text{.....} (41)$$

إذا ضربنا الناتج ضرباً قياسياً بالمتجه A نحصل على ما يلي:

$$A\cdot(B\times C) = \left(A_x\hat{i} + A_y j + A_z k\right)\cdot(B\times C)$$

$$= A_x\left(B_y C_z - B_z C_y\right) - A_y\left(B_x C_z - B_z C_x\right)$$

$$+ A_z\left(B_x C_y - B_y C_x\right) \quad \text{.....} (42)$$

$$= A_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - A_y \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} \quad \text{.....} (43)$$

أي أننا نستطيع كتابته على شكل محددة كما يلي:

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad \text{.....} (44)$$

ويمكنك التحقق بسهولة من أن:

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{A}$$

ومن خلال خصائص هذه المحددة فإن حاصل الضرب القياسي الثلاثي لا يتغير بتبديل المتجهات دورياً، أي أن تبديل صف مكان آخر مرتين يعطي إشارة موجبة كما يلي:

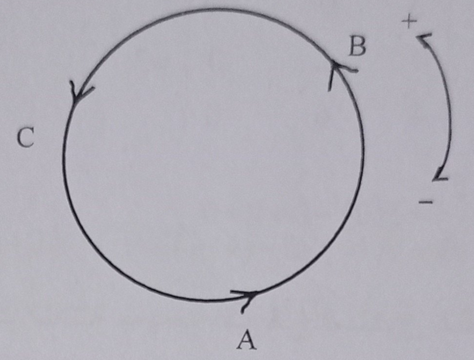
$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right) = \vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) \quad \text{.....} (45)$$

والترتيب غير الدوري يترتب عليه إشارة سالبة (تبديل صف مكان صف مرة واحدة في المحددة) كما يلي:

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=-\vec{A}.\left(\vec{C}\times\vec{B}\right)=-\vec{B}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right) \quad \text{......................................} (46)$$

وحتى نذكر هذه القواعد نرسم دائرة صغيرة كما في الشكل (24).

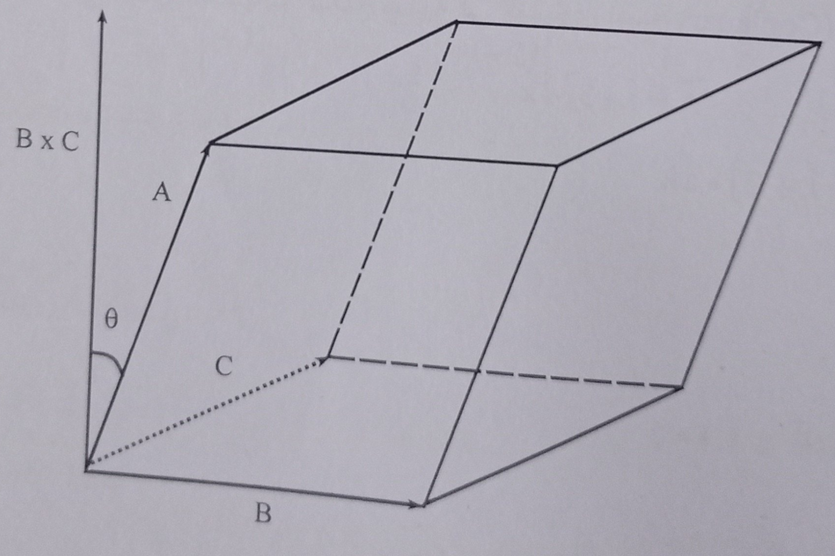
الشكل (24)



حاصل الضرب القياسي للمتجهات A و B و C يساوي حجم متوازي السطوح (الشكل (25)) **أن القيمة المطلقة أي للحجم دائماً موجبة.**

$$\text{حجم متوازي السطوح} = \left|\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right| \quad \text{......................................} (47)$$

الشكل (25)



◂◂ مثال (26)

إذا كان $\vec{A}=3\hat{i}$ ، $\vec{B}=2\hat{j}$ ، $\vec{C}=4\hat{i}+6\hat{j}$

جد $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$

الحل:

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 6 & 0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2 & 0\\ 6 & 0\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix}$$

$$+\,0\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=3(0)-0+0=0$$

ومن هنا نقول إن المتجهات الثلاثة جميعها تقع في المستوى نفسه (Coplanar) وفي مثالنا هذا نلاحظ أن المتجهات الثلاثة موجودة في مستوى xy، وبشكل عام إذا كانت المتجهات الثلاثة في المستوى نفسه فإن $\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=0$ أي أن حجم متوازي السطوح يساوي صفراً.ذلك لان $\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ عمودي على $\vec{A}$. وحاصل الضرب القياسي لمتجهين متعامدين =صفر.

◂◂ مثال (27)

جد قيمة a التي تجعل المتجهات الثلاثة التالية في المستوى نفسه (Coplanar)

$\vec{B}=\hat{i}\,,\qquad \vec{A}=\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{C}=\hat{i}+2\hat{j}+a\hat{k}$

الحل:

في المستوى نفسه تعني:

$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$1(0) - 3(a - 0) + 1(2 - 0) = 0$$

$$0 - 3a + 2 = 0$$

أي أن

$$a = \frac{2}{3}$$

مثال (28)

إذا كان: $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ، $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ، $\vec{C} = \hat{i} + j + 2\hat{k}$

جد (أ) $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ ، (ب) $\vec{A}.(\vec{C} \times \vec{B})$

الحل:

(أ)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 20 - 12 + 6 = 14$$

(ب)

$$\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2-8) - 3(-2-2) + (-2)(4-1)$$

$$= -20 + 12 - 6 = -14$$

أي أن

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = -\vec{A}.(\vec{C}\times\vec{B})$$

مثال (29)

أوجد حجم متوازي السطوح الذي أضلاعه:

$\vec{A}=3\hat{i}-\hat{j}$ ، $\vec{B}=\hat{j}+2\hat{k}$ ، $\vec{C}=\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}$

الحل:

حجم متوازي السطوح $= |A.(B\times C)|$

$$A\cdot(B\times C)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\,(4-10)-(-1)\,(0-2)+0$$

$$A.(B\times C) = -18-2 = -20$$

حجم متوازي السطوح $= |A.(B\times C)| = |-20| = 20$

التدريب (9)

إذا كانت المتجهات الثلاثة $\vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ، $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ، $\vec{C}=3\hat{i}+a\hat{j}+5\hat{k}$ تقع في نفس المستوى احسب قيمة a .

أسئلة التقويم الذاتي (6)

1. إذا كان المتجه $\vec{A}=2\hat{i}+\hat{k}$ ، $\vec{B}=3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ ، $\vec{C}=\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ جد:

(أ) $\vec{A}.|\vec{B}\times\vec{C}|$ ، (ب) $\vec{A}.(\vec{C}\times\underline{B})$ ، (جـ) $(\vec{A}\times\vec{B}).\underline{C}$

2. جد حجم متوازي السطوح إذا كانت أضلاعه هي:

$\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ، $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ، $\vec{C}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

5.6 حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي

Triple Vector Product

عزيزي الدارس،

نعرف حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي على الصورة:

$$\vec{A}\,x\,(\vec{B}\,x\,\vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}.B)\,\vec{C} \quad \text{.......................................} (48)$$

لإثبات هذه العلاقة نعرف قيمة B x C ولذلك يمكن أن نكتب العلاقة السابقة على الصورة:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}) \times [(B_y\,C_z - B_z\,C_y)\,\hat{i}$$

$$+ (B_z\,Cx - B_x\,C_z)\,\hat{j} + (B_x\,C_y - B_y\,C_x)\,\hat{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_y C_z - B_z C_y & B_z C_x - B_x C_z & B_x C_y - B_y C_x \end{vmatrix}$$

$$= (A_y\,B_x\,C_y - A_y\,B_y\,C_x - A_z\,B_z\,C_x + A_z\,B_x\,C_z)\,\hat{i}$$

$$- (A_z\,B_z\,C_y - A_z\,B_y\,C_x + A_x\,B_x\,C_y - A_x\,B_y\,C_x)\,\hat{j}$$

$$+ (A_x\,B_z\,C_x - A_x\,B_x\,C_z - A_y\,B_y\,C_z + A_y\,B_z\,C_y)\,\hat{k}$$

بإضافة $A_x \quad B_x \quad C_x$ للقوس الأول ثم طرحها ، وإضافة: $C_y \quad B_y \quad A_y$ للقوس الثاني ثم طرحها .وبإضافة $A_z\,B_z\,C_z$ للقوس الثالث ثم طرحها ، نجد أن:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = [\,A_y\,B_x\,C_y - A_y\,B_y\,C_x + A_x\,B_x\,C_x - A_x\,B_x\,C_x$$

$$-A_z\,B_z\,C_x + A_z\,B_x\,C_x\;]\,\hat{i} - [A_z\,B_z\,C_y - A_z\,B_y\,C_z + A_y\,B_y\,C_y$$

$$- A_y\,B_y\,C_y + A_x\,B_x\,C_y - A_x\,B_y\,C_x]\,\hat{j}\ +$$

$$[\ A_x\,B_z\,C_x - A_x\,B_x\,C_z + A_z\,B_z\,C_z - A_z\,B_z\,C_z$$

$$- A_y\,B_y\,C_z + A_y\,B_z\,C_y\ ]\,\hat{k}$$

بإخراج العوامل المشتركة في كل قوس على حدة:

$$A\times(B\times C)=\left[\left(A_x C_x+A_y C_y+A_z C_z\right)B_x-\left(A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z\right)Cx\right]\hat{i}$$

$$-\left[\left(A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z\right)C_y-\left(A_x C_x+A_y C_y+A_z C_z\right)B_y\right]\hat{j}$$

$$+\left[\left(A_x C_x+A_y C_y+A_z C_z\right)B_z-\left(A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z\right)C_z\right]\hat{k}$$

وهذه العلاقة يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)B_x-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)C_x\right]\hat{i}-\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)C_y-\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)B_y\right]\hat{j}$$

$$+\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)B_z-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)C_z\right]\hat{k}$$

بأخذ $\vec{A}.\vec{C}$ و $\vec{A}.\vec{B}$ عامل مشترك من كل القواس ينتج:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\left(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,k\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\left(-C_x\,\hat{i}-C_y\,\hat{j}-C_z\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \qquad (49)$$

ويجب ملاحظة أن ترتيب إجراء الضرب الاتجاهي مهم جداً فمثلاً:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\neq\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

حيث أن:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{C}.\vec{A})\vec{B}-(\vec{C}.\vec{B})\vec{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

◄◄ مثال (30)

إذا كان $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}$ ، $\vec{B}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ، $\vec{C}=4\hat{j}-3\hat{k}$ أوجد قيمة (أ) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

(ب) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

الحل:

(أ) الطريقة الأولى نجد $\vec{B}\times\vec{C}$

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}=\hat{i}\,(9-4)-\hat{j}\,(-6-0)+\hat{k}(8)$$

$$\vec{B}\times\vec{C}=5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}=\hat{i}\,(8-0)-\hat{j}\,(8-0)+\hat{k}\,(6-5)$$

أي أن $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=8\hat{i}-8\hat{j}+\hat{k}$

الطريقة الثانية:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$
$$=\left[\left(\hat{i}+\hat{j}\right)\cdot\left(4\hat{j}-3\hat{k}\right)\right]\left(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}\right)$$
$$-\left[\left(\hat{i}+\hat{j}\right)\cdot\left(2\,\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}\right)\right]\left(4\,\hat{j}-3\hat{k}\right)$$
$$=4\left(2\hat{i}-3j+k\right)-(2-3)\,(4j-3k)$$
$$=8\hat{i}-12\hat{j}+4\hat{k}+4\hat{j}-3\hat{k}=8\hat{i}-8\hat{j}+\hat{k}$$

(ب) الطريقة الأولى:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}\,(1)-\hat{j}(1)+\hat{k}\,(-3-2)$$

$\vec{A}\times\vec{B}= \hat{i}-\hat{j}-5\hat{k}$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$=\hat{i}\,(3-(-20))-\hat{j}(-3)+\hat{k}(4)$$

أي أن

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=23\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$$

الطريقة الثانية

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}-(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}$$

أي أن

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=[(4\hat{j}-3\hat{k})\cdot(\hat{i}+\hat{j})](2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$$
$$-[(4\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-3\hat{j}+k)](\hat{i}+\hat{j})$$
$$=4(2-3\hat{i}+\hat{k})-(-12-3)(\hat{i}+\hat{j})$$
$$=8\hat{i}-12\hat{j}+4\hat{k}+15\hat{i}+15\hat{j}$$

أي أن

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=23\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$$

لاحظ أن

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

◄◄ مثال (31)

إذا كان $\vec{A}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ ، $\vec{B}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ، $\vec{C}=\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}$

جد (أ) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

(ب) $\vec{C}\times(\vec{B}\times\vec{A})$

الحل:

(أ)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$=\left[\left(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-5\hat{j}-3k\right)\right]\left(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

$$-\left[\left(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)\right]\left(\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}\right)$$

$$=(2-5+3)\left(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)-(2-1-2)\left(\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}\right)$$

$$=0+\left(\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}\right)$$

أي أن:

$$A\times(B\times C)=\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}$$

(ب)

$$\vec{C}\times(\vec{B}\times\vec{A})=(\vec{C}\cdot\vec{A})-(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{A}=\left(\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}\right)=2-5+3=0$$

$$\vec{C}\cdot\vec{B}=\left(\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

$$=1+5-6=0$$

أي أن:

$$\vec{C}\times(\vec{B}\times\vec{A})=0$$

وهذا يعني أن المتجه $\vec{C}$ عمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وموازي للمتجه $\vec{B}\times\vec{A}$.

الميكانيك :- هو احد فروع علم الفيزياء الذي يدرس الحركة ويضم فرعين رئيسيين هما.

(1) الكاينيماتك :- وهو علم يدرس حركة الاجسام من غير النظر لمسبباتها.
(2) الداينمك :- وهو علم يدرس مسببات الحركة . مثل القوة والطاقة .

* الحركة :- هي تغيير مستمر في موقع الجسم بالنسبة الى نقطة ثابتة وتكون على أنواع .

(1) حركة انتقالية :- حركة السيارة على طريق افقي .
(2) حركة دورانية :- حركة الارض حول محورها .
(3) حركة اهتزازية :- حركة البندول البسيط .

* نقطة الاسناد :- يعتمد على حدوث تغيير في موقع الجسم او عدم حدوثه نسبة الى نقطة الاسناد .

* الموقع :- بعد الجسم عن نقطة الاسناد . وهو كمية متجهه لها مقدار واتجاه . $\Delta x = x_f - x_i$

- مثال :- افرض انك التقيت صديقك سألته اين اوقف سيارته ؟
(1) تقع على بعد (50m) من باب الكلية باتجاه الشمال . اذاً من خلال الوصف نتعرف على (1) بعدها من الباب (50m) تمثل (مقدار المتجه) .
(2) باتجاه الشرق تمثل (اتجاه المتجه) .
(3) باب المدرسة تمثل (نقطة الاسناد) .

* الازاحة :- هو التغيير في موقع الجسم . $\Delta x = x_f - x_i$

* المسافة :- هو مجموع المسارات التي تحركها الجسم . $\Delta d = d_1 + d_2$

مثال :- تحرك جسم وكان مقدار موقعه الابتدائي $(x_i = 5m)$ ومقدار موقعه النهائي $(x_f = 12m)$ جد التغيير في الازاحة ؟

$\Delta x = x_f - x_i = 12 - 5 = 7\,m$

②

- نفرض ان الجسم تحرك من موقعه الابتدائي ($X_i = 5m$) باتجاه معاكس الى موقعه النهائي ($X_f = 1m$) جد الازاحة؟

$$\Delta x = x_f - x_i = 1 - 5 = \underline{\underline{-4}}$$ السالب دليل على عكس الاتجاه (باتجاه اليسار).

- نفرض ان الجسم تحرك من موقعه الابتدائي ($X_i = 5$) الى موقعه النهائي ($X_f = 20$) ثم عاد الى موقعه الابتدائي فإن الازاحة تساوي صفراً.

$$\Delta x_1 = x_f - x_i = 20 - 5 = 15$$
$$\Delta x_2 = x_f - x_i = 5 - 20 = -15$$

- بينما المسافة الكلية التي قطعها الجسم في هذه الحالة هي ($30m$) لانه قطع في ذهابه ~~...~~ وقطع في رجوعه الى موقعه الابتدائي مسافة ($15m$) فتكون المسافة الكلية ($d = 15 + 15 = 30$).

* السرعة المتوسطة :- التغيير الحاصل في موقع الجسم خلال فترات زمنية مختلفة.

$$V_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad \text{①}$$

- معدل السرعة المتوسطة :- ② $$V = \frac{V_i + V_f}{2}$$

- مثال :- تحركت سيارة من السكون ووصل بعد ($1s$) الى موقعه الابتدائي التي تبعد ($2m$) عن نقطة الاصل وبعد مرور ($4s$) وصله الى موقعه النهائي التي تبعد ($32m$) عن نقطة الاصل. جد السرعة المتوسطة؟

$$V_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{32 - 2}{4 - 1} = \frac{30}{3} = 10\ m/s$$

* الانطلاق المتوسط :- ان نسبة المسافة الكلية المقطوعة الى الزمن المستغرق، يعتمد على المسافة.

$$V_{avg} = \frac{d}{t} \quad \circledast$$

مثال:- تحركت سيارتين M, K من نقطة A الموقع الابتدائي في آن واحد للوصول الى نقطة (B) هو الموقع النهائي لكن السيارة (K) تسلك مسار مستقيم للوصول الى نقطة (B) بينما السيارة (M) تسلك مسار منحني للوصول الى نفس النقطة و في الفترة الزمنية نفسها (10 s). المسافة التي قطعها السيارة (K) على طريق مستقيم تساوي (100m) والمسافة التي قطعها السيارة (M) على طريق منحني يساوي (130m) جد السرعة المتوسطة والانطلاق المتوسط؟

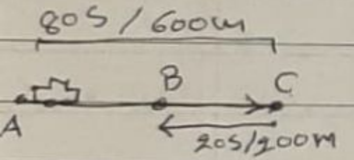
$$K \text{ الانطلاق المتوسط للشاحنة} = \frac{100}{10} = 10\ m/s$$

$$M \text{ الانطلاق المتوسط للشاحنة} = \frac{130}{10} = 13\ m/s$$

$$K \text{ السرعة المتوسطة للشاحنة} = \frac{100}{10} = 10\ m/s$$

$$M \text{ السرعة المتوسطة للشاحنة} = \frac{100}{10} = 10\ m/s$$

مثال:- سيارة بدأت بالحركة من نقطة السكون (A) بالاتجاه الموجب لمحور X فوصلت لنقطة (C) بعد مضي (80s) ثم استدارت وتحركت باتجاه معاكس حتى توقفت عند النقطة (B) خلال (20s) احسب:-



① الانطلاق المتوسط خلال الفترة الاولى (80s).

$$\text{الانطلاق المتوسط} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{600}{80} = 7.5\ m/s$$

② السرعة المتوسطة خلال الفترة الاولى (80s).

$$V_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{600}{80} = 7.5\ m/s$$

③ الانطلاق المتوسط خلال الفترة الكلية (100s).

$$V_{avg} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{600+200}{80+20} = 8\ m/s$$

④ السرعة المتوسطة خلال الفترة الكلية (100s).

$$V_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{600-200}{80+20} = \frac{400}{80+20} = 4\ m/s$$

* السرعة الآنية :- هي سرعة الجسم المتحرك عند اي لحظة زمنية .

$$V_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

* الانطلاق الآني :- هو الرقم الذي نقرأه على اللوحة الموضوعة في السيارة أمام السائق .

* الحركة بسرعة ثابتة :- هو عبارة عن قطع الجسم ازاحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية .

* التعجيل :- المعدل الزمني للتغير في مقدار سرعة الجسم .

نوعان :- ① تسارعي ② تباطئي

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

① تسارعي :- يمكن ان يزداد مقدار سرعتها عند فترات زمنية معينة تسمى بالتعجيل التسارعي .

② التباطئي :- يمكن ان يقلل من مقدار سرعتها عند فترات زمنية معينة تسمى بالتعجيل التباطئي .

* التعجيل المركزي :- هو عبارة عن حصول تغير في اتجاه سرعة المركبة مع ثبوت انطلاقها عندما تسير المركبة على منعطف افقي .

- عندما تكون السرعة ثابتة المقدار والاتجاه فإن التعجيل يساوي صفر .

* معادلات الحركة الخطية بتعجيل منتظم :-

① اشتقاق معادلة الإزاحة بدلالة كل من السرعة النهائية والسرعة الابتدائية والزمن :-

$$V_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{—— ①}$$

$$V_{avg} = \frac{V_i + V_f}{2} \quad \text{—— ②}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{V_i + V_f}{2} \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{V_i + V_f}{2}\right) \Delta t \quad \text{—— ③}$$

---

② معادلة السرعة النهائية بدلالة كل من السرعة الابتدائية والتعجيل والزمن :-

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{\Delta t} \quad \text{—— ①}$$

$$V_f - V_i = a\,\Delta t \quad \text{—— ②}$$

$$\therefore V_f = V_i + a\,\Delta t \quad \text{—— ③}$$

---

③ معادلة الإزاحة بدلالة كل من السرعة الابتدائية والتعجيل والزمن :-

$$\Delta x = \left(\frac{V_i + V_f}{2}\right) \Delta t \quad \text{—— ①}$$

بتعويض عن السرعة النهائية ① في معادلة ① نحصل على :-

$$\Delta x = \left(\frac{V_i + [V_i + a\,\Delta t]}{2}\right) \Delta t \quad \text{—— ②}$$

$$\Delta x = \frac{2V_i\,\Delta t + a(\Delta t)^2}{2} \quad \text{—— ③}$$

$$\therefore \Delta x = V_i\,\Delta t + \frac{1}{2} a\,\Delta t^2 \quad \text{—— ④}$$

④ معادلة السرعة النهائية بدلالة التعجيل والإزاحة والسرعة الابتدائية :-

$$\Delta x = \left(\frac{v_i + v_f}{2}\right)\Delta t \quad \text{①}$$

$$v_f = v_i + a\,\Delta t \quad \text{②}$$

$$v_f - v_i = a\,\Delta t \quad \text{③}$$

$$\Delta t = \frac{v_f - v_i}{a} \quad \text{④}$$

نعوض معادلة ④ في ① نحصل على :-

$$\Delta x = \frac{v_i + v_f}{2} \cdot \frac{v_f - v_i}{a} \quad \text{⑤}$$

$$\Delta x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} \quad \text{⑥}$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\,\Delta x \quad \text{⑦}$$

عندما تبدأ الجسم بالحركة من السكون فان $(v_i = 0)$ نحصل :-

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\,\Delta x \quad \text{⑧}$$

$$v_f^2 = 2a\,\Delta x \Rightarrow v_f = \sqrt{2a\,\Delta x} \quad \text{⑨}$$

مثال :- احسب مقدار التعجيل بين نقطتين والمثبتة على الرسم للسيارة في الشكل علماً ان $V_K = 20\,m/s$ ، $V_L = 30\,m/s$ ، $V_M = 30\,m/s$ ، $V_N = 25\,m/s$ خلال الفترات الزمنية الآتية ؟

① $(t_1 = 0)$ و $(t_2 = 10)$ بين نقطتين K, L .

② $(t_2 = 10)$ و $(t_3 = 15)$ بين (L, M) .

③ $(t_3 = 15)$ و $(t_4 = 20)$ بين (M, N) .

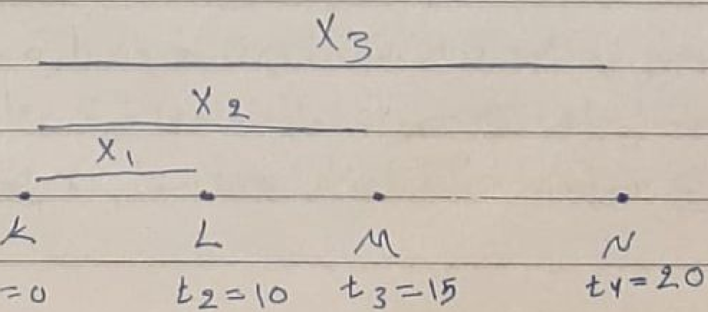
④ $(t_1 = 0)$ و $(t_4 = 20)$ بين (K, N) .

① $$a_{KL} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_L - V_K}{t_2 - t_1}$$

$$a = \frac{30 - 20}{10 - 0} = 1\,m/s^2$$

② $$a_{LM} = \frac{V_M - V_L}{t_3 - t_2} = \frac{30 - 30}{15 - 10}$$

$a = zero$ لأن السرعة ثابتة .



③ $$a_{MN} = \frac{25 - 30}{20 - 15} = -1\,m/s^2$$

* معادلات الحركة في السقوط الحر :-

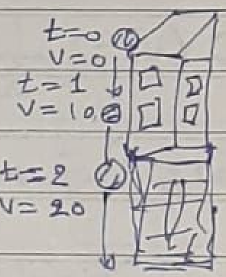
① $v_f = v_i + gt \Rightarrow v_f = gt$ —— ①

② $\Delta x = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2} g t^2$ —— ②

③ $v_f = \sqrt{2a\Delta x} \Rightarrow v_f = \sqrt{2g\Delta y}$ —— ③

- الاجسام الساقطة سقوطاً حراً نعوض عن $(v_i = 0)$ في معادلات الحركة الخطية.

مثال :- من سطح بناية سقطت كرة سقوطاً حراً فوصلت الارض بعد فترة زمنية (3s) احسب مقدار ① ارتفاع سطح البناية ② سرعة الكرة لحظة اصطدامها بسطح الارض ③ سرعة وارتفاع الكرة فوق سطح الارض بعد مرور (1s) من سقوطها ؟
إفرض ان مقدار التعجيل الارضي $(g = -10\ m/s^2)$ ؟



① $y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2}(-10)(3)^2 = -45\ m$

$h = 45$ ارتفاع البناية .

② $v_f = v_i + gt = 0 + (-10)(3) = -30\ m/s$

③ $v_f = v_i + gt = 0 + (-10)(1) = -10\ m/s$

$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2}(-10)(1)^2 = -5\ m$

* ارتفاع الكرة فوق سطح الارض $\underline{\underline{h}} = 45 - 5 = 40$

مثال :- من نقطة على سطح الارض قذفت كرة صغيرة بانطلاق (40 m/s) شاقولياً نحو الاعلى اهمل تأثير الهواء احسب ① اعلى ارتفاع يمكن ان تصله الكرة فوق سطح الارض ② الزمن الذي تستغرقه الكرة من لحظة قذفها لحين وصولها الى اعلى ارتفاع لها ③ سرعتها وارتفاعها فوق سطح الارض عند اللحظة $(t = 2s)$
④ سرعتها لحظة اصطدامها بسطح الارض ؟

- لحظة وصول الكرة لأعلى ارتفاع تكون سرعتها النهائية $(V_f = 0)$.

1) $V_f^2 = V_i^2 + 2g\Delta y$

$0 = (40)^2 + 2(-10) * \Delta y$

$\Delta y = 80\,m \Rightarrow h = 80\,m$

2) $V_f = V_i + gt$

$0 = 40 + (-10)\,t_1 \Rightarrow t = 4s$

3) $V_f = V_i + gt = 40 + (-10) * 2 = 20\,m/s$

- حساب ارتفاع الكرة بعد مرور $(t=2)$ من لحظة قذفها لدينا:

$\Delta y = V_i t + \frac{1}{2} g (t)^2 = 40 * 2 + \frac{1}{2}(-10)(2)^2 = 60$

ارتفاع الكرة $h = 60m$

4) $\because$ زمن صعود الكرة الى اعلى ارتفاع لها $t = 4s$.

- نحسب زمن نزول الكرة من اعلى ارتفاع لها حين وصولها الى سطح الارض فتكون $(V_i = 0)$. نفرض ان الكرة تسقط سقوطاً حراً.

$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2$

$-80 = \frac{1}{2}(-10)\,t^2$

$t^2 = \frac{-80}{-5} = 16$

$\therefore t = 4s$

$\therefore$ (t) هو الزمن الكلي للكرة صعوداً ونزولاً. $(8s)$

$\therefore V_f = 40 + (-10) * 8$

$V_f = -40\,m/s$

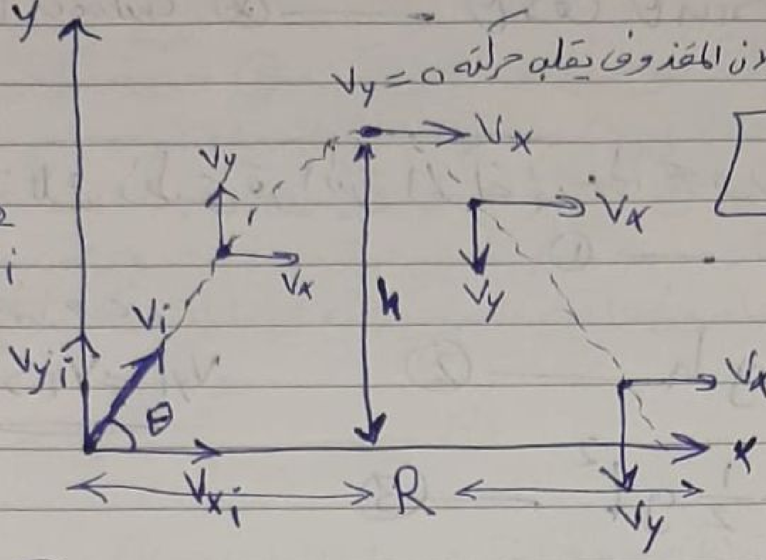
- كما يمكن ايجاد سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالارض.

$V_f = V_i + gt$

$\boxed{9-A}$

* الحركة في بعدين (المقذوفات) :-

$$V_i^2 = V_{xi}^2 + V_{yi}^2$$



$$\left[\begin{array}{l} V_{xi} = V_i \cos\theta \\ V_{yi} = V_i \sin\theta \end{array}\right]$$

$$V_f^2 = V_{xf}^2 + V_{yf}^2$$

* يكون التغيير في المقذوفات المركبة العمودية . المركبة الأفقية يكون ثابتاً طول الرحلة .

* هناك اربع معادلات اساسية في المقذوفات :-

① زمن اقصى ارتفاع (t_1) :-

$$V_{yf} = V_{yi} - g t_1$$

$$0 = V_{yi} - g t_1$$

$$g t_1 = V_{yi} \Rightarrow t_1 = \frac{V_{yi}}{g} = \frac{V_i \sin\theta}{g} \text{ —— } ①$$

② زمن التحليق :-

$$t = 2t_1 = \frac{2V_i \sin\theta}{g} \text{ —— } ②$$

③ اقصى ارتفاع :-

$$\cancel{V_{yf}^2} = V_{yi}^2 - 2gh \Rightarrow 2gh = V_{yi}^2$$

0

$$H = \frac{V_{yi}^2}{2g} = \frac{(V_i \sin\theta)^2}{2g} \text{ —— } ③$$

④ المدى الأفقي :-

$$R = V_{xi}\, t = V_i \cos\theta\, t$$

$$R = V_i \cos\theta * \frac{2V_i \sin\theta}{g} = \frac{V_i^2 \sin 2\theta}{g} \text{ —— } ④$$

$$R_{max} = \frac{V_i^2}{g} \text{ —— } ⊗$$

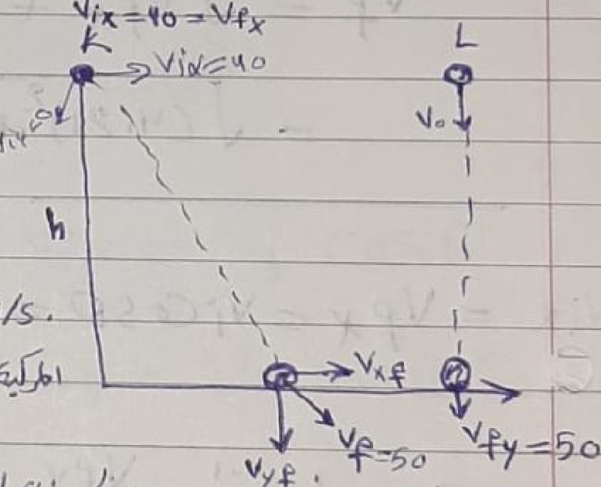
* الحركة في بعدين :- (حركة المقذوفات).

- هي نتيجة محصلة نوعين من الحركة :- ① حركة شاقولية تكون سرعة المقذوف (V_y) متغيرة بالمقدار والاتجاه بسبب تأثير قوة الجاذبية الارضية ② الحركة الافقية تكون سرعة المقذوف (V_x) ثابتة بالمقدار والاتجاه بسبب عدم تأثير قوة الجاذبية الارضية فيها.
لذا فإن السرعة المحصلة بين هاتين السرعتين تعطى بالمعادلة التالية :-

$$V_f^2 = V_x^2 + V_y^2 \quad \text{———} \quad ①$$

مثال :- قذفت الكرة (K) بسرعة افقية مقدارها (40m/s) من ارتفاع شاقولي (h) فضربت الارض بسرعة مقدارها (50m/s). ومن الارتفاع نفسه قذفت كرة (L) شاقولياً نحو الاسفل بسرعة ابتدائية (V_0) فضربت سطح الارض بسرعة مقدارها (50m/s) احسب مقدار السرعة (V_0) للكرة (L)؟

الحل :-



$$V_{xf} = V_{xi} = 40\ m/s$$

$$V_f^2 = V_{xf}^2 + V_{yf}^2$$

$$(50)^2 = (40)^2 + V_{yf}^2 \Rightarrow V_{yf} = -30\ m/s.$$

المركبة الشاقولية للسرعة النهائية للكرة (K).

لحساب الارتفاع :-

$$V_{yf}^2 = V_{yi}^2 + 2g\,\Delta Y$$

$$(-30)^2 = 0 + 2(-10)\,\Delta Y \Rightarrow \underline{\Delta Y = -45} \Rightarrow h = 45\ m$$

* لحساب السرعة الابتدائية للكرة (L) :-

$$V_{yf}^2 = V_{yi}^2 + 2g\,\Delta Y$$

$$(50)^2 = V_{yi}^2 + 2(-10)(-45) \Rightarrow V_{yi}^2 = 1600$$

$$\therefore \underline{V_{yi}} = +40\ m/s$$

مثال :- لاعب كرة قدم ركل بقدمه الكرة الموضوعة على سطح الارض فكانت سرعتها الابتدائية $(V_i = 20\,m/s)$ بزاوية $(\theta = 37)$ فوق الافق احسب :- ① اعلى ارتفاع فوق سطح الارض تصله الكرة .
② الزمن الذي تستغرقه الكرة من لحظة ضربها حتى وصولها الى قمة مسارها ثم احسب الزمن الكلي من لحظة ضربها حتى لحظة اصطدامها بسطح الارض .
③ المدى الافقي للكرة خلال حركتها من نقطة ضربها حتى لحظة اصطدامها بالارض . ④ سرعتها قبل لحظة اصطدامها بسطح الارض وباي اتجاه .
⑤ اعظم مدى افقي لهذا المقذوف ؟

① الحل :- نحسب اولاً المركبة الافقية للسرعة الابتدائية للكرة .

$$V_{xi} = V_i \cos\theta = 20 \cos 37 = 16\ m/s$$

نحسب المركبة الشاقولية :-

$$V_{yi} = V_i \sin\theta = 20 \sin 37 = 12\ m/s$$

∵ سرعة الكرة وهي في قمة مسارها $(V_{yf} = 0)$ اذن نطبق المعادلة :-

$$V_{yf}^2 = V_{yi}^2 + 2g\,\Delta y \Rightarrow 0 = (12)^2 + 2(-10)\,\Delta y \qquad h = \frac{V_i^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$\therefore \Delta y = \frac{144}{20} = 7.2\ m \Rightarrow h = 7.2\ m$$

② - لحساب الزمن الكلي لطيران الكرة يتطلب حساب اولاً الزمن المستغرق من لحظة ركلها حتى لحظة وصولها الى قمة مسارها .

$$V_{yf} = V_{yi} + gt \Rightarrow 0 = 12 + (-10)\,t \qquad t_1 = \frac{V_i \sin\theta}{g}$$

$$\therefore t_1 = 1.2\,S .$$

ثم نحسب الزمن الذي تستغرقه الكرة في اثناء نزولها من قمة مسارها حتى لحظة اصطدامها بسطح الارض .

$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow -7.2 = \frac{1}{2}(-10)\, t_2^2$$

$$t_2 = 1.2\,S \qquad \therefore t_{tottal} = 1.2 * 2 = 2.4\,S$$

(13)

- المدى الافقي

③ $R = \frac{V_i^2 \sin 2\theta}{g}$ — ⊗

$R = V_{xi} \, t_T = 16 * 2.4 = 38.4 \, m$

---

④ - لحساب سرعة الكرة لحظة اصطدامها بسطح الارض (V_f) يتطلب حساب المركبتين الافقية والشاقولية لهذه السرعة بما ان المركبة الافقية ثابتة طيلة مسارها $(V_x = 16 \, m/s)$ لذا يتطلب حساب مركبتها الشاقولية (V_{yf}).

$$V_{yf} = V_{yi} + g t_2$$

$$V_{yf} = 0 + (-10)(1.2) = -12 \, m/s$$

∵ المركبة الافقية والشاقولية متعامدين فيكون محصلتيهما :-

$$V_f^2 = V_{xf}^2 + V_{yf}^2 = (16)^2 + (-12)^2 \Rightarrow V_f = 20 m/s$$

- لتعيين اتجاه هذه السرعة نطبق :-

$$\tan\theta = \frac{V_{yf}}{V_{xf}} = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}$$

$$\therefore \theta = -37^\circ$$

---

⑤ - لحساب اعظم مدى افقي . يتحقق عندما تكون الزاوية (45°) .

$$R_{max} = \frac{V_i^2}{g} = \frac{(20)^2}{10} = 40 m$$

* القوة :- هي المؤثر الذي يغير او يحاول ان يغير من حالة الجسم او شكل الجسم . تقاس بوحدة (N) $\left(1kg\,\frac{m}{s^2}\right)$.

* انواعها :-

1) قوى بين جسمين بتماس مباشر مثل (الشد ، السحب ، الدفع) .
2) قوى بين جسمين ينعدم فيه التماس المباشر مثل (كهربائية ، مغناطيسية ، نووية)

---

* القصور الذاتي :- خاصية الجسم في مقاومة التغير الحاصل في حالته (الحركية او الساكنة) وتعتمد على كتلة الجسم .

---

* قوانين نيوتن في الحركة :-

1) قانون نيوتن الاول :- في حالة انعدام محصلة القوى الخارجية المؤثرة في الجسم . فالجسم الساكن يبقى ساكناً والمتحرك يبقى متحركاً .

2) قانون نيوتن الثاني :- تعجيل الجسم يتناسب طردياً مع صافي محصلة القوى المؤثرة في الجسم وبثبوت كتلة الجسم . $F = ma$

3) قانون نيوتن الثالث :- لكل قوة فعل هناك قوة رد فعل تساويها بالمقدار وتعاكسها بالاتجاه . $F_{12} = -F_{21}$

---

* الكتلة : مقدار ما يحتويه الجسم من المادة وكتلة الجسم لا تتغير فتبقى كما هي بغض النظر عن المكان الموجود فيه الجسم .

* الوزن : وزن الجسم يساوي كتلته مضروباً في عجلة الجاذبية لذا اذا تغيرت الجاذبية يتغير وزن الجسم . $W = mg$

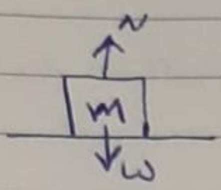
---

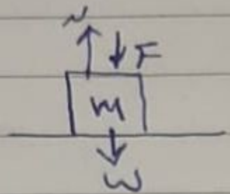
* قانون الجذب العام :- كل كتلتين في الكون تجذب احدهما الاخر بقوة تتناسب طردياً مع حاصل ضرب الكتلتين وعكسياً مع مربع البعد بينهما .

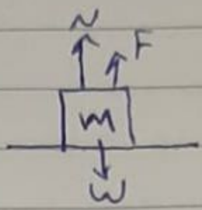
$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$ و G ثابت الجذب العام $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.

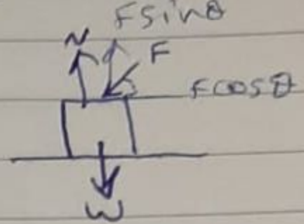
* القوى المؤثرة في الجسم او النظام ؟

① القوة العمودية :- هي القوة التي تؤثر بها السطح على الجسم ويرمز له (N)

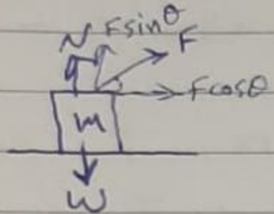


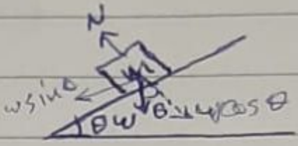






$N = W$ $\quad N = W + F$ $\quad N = W - F$ $\quad N = F\sin\theta + W$

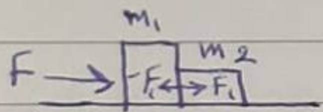


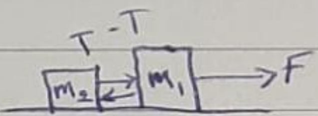


$N = W\cos\theta$

$N = W - F\sin\theta$

② قوة الشد :- القوة التي يؤثر بها الحبل في الجسم ويرمز له (T).

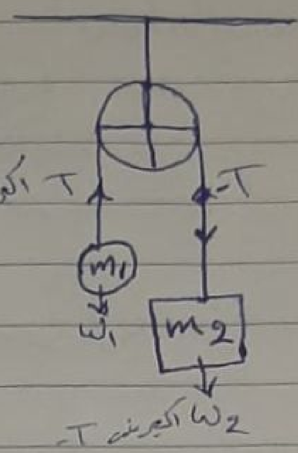




③ القوة الخارجية :- هي القوة التي تؤثر على نظام معزول توجد فيه عدة جسيمات.

④ القوى الداخلية :- فهي القوة الناتجة عن تفاعل بين مكونات النظام.

مثال:- جسمان كتلة احدهما (2kg) والاخر (3kg) معلقين شاقولياً بطرفي حبل خفيف يمر فوق بكرة مهملة الوزن والاحتكاك احسب مقدار تعجيل الجسمين والشد في الحبل افرض $g = 10\ m/s^2$ ؟



$$\Sigma F = ma$$

$$T - m_1 g = ma$$

$$T = 2 * 10 + 2 * a$$

$$T = 20 + 2a \quad ---- (1)$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

$$3(10) - T = 3a$$

$$T = 30 - 3a \quad ---- (2)$$

$$\therefore 20 + 2a = 30 - 3a$$

$$5a = 10 \Rightarrow a = 2\ m/s^2$$

$$\therefore T = 30 - 3(2) = 24\ N$$

الاحتكاك :- هي عبارة عن حصول تلامس بين سطح الجسم والسطح الموضوع عليه تتداخل النتوءات الموجودة بين السطحين مسببة قوة معيقة للحركة تسمى قوة الاحتكاك . وتكون على نوعين :-

① قوة الاحتكاك السكوني :- (f_s) فاذا أثرت محصلة قوى في جسم ولم تستطيع تحريكه فلابد من وجود قوة احتكاك تمنع الجسم من الحركة وحيث ان الجسم لايزال في حالة السكون لذا تسمى بقوة الاحتكاك السكوني . $f_{s\,max} = \mu_s N$ —— ①

② قوة الاحتكاك الانزلاقي :- (f_k) حينما تزداد القوة المؤثرة في الجسم بشرط تتغلب على قوة الاحتكاك السكوني يبدء الجسم بالحركة فتقل قوة الاحتكاك بشكل كبير وتسمى حينها قوة الاحتكاك الانزلاقي . $f_k = \mu_k N$ —— ②

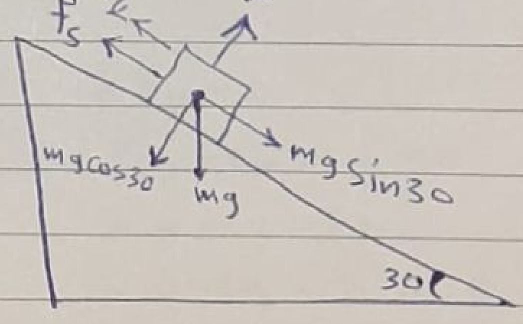
- ويعتمد على طبيعة الجسمين المتلامسين ولا يعتمد على مساحة السطحين المتلامسين.

مثال :- وضع صندوق كتلته (400kg) على سطح افقي مائل خشن بزاوية (30°) من السطح الافقي كان الصندوق على وشك الانزلاق احسب ؟

① قوة الاحتكاك السكوني حينما يوشك الصندوق على الحركة.

② تعجيل الصندوق اذا كان معامل الاحتكاك الانزلاقي $\mu_k = 0.1$.

① $\Sigma F_x = 0$ * لان الجسم ساكن



$f_s - mg\sin\theta = 0$

$f_s = mg\sin\theta$

$f_s = 400 * 10 * 0.5 = 2000N$

② $\Sigma F_x = ma$

$mg\sin\theta - F_k = ma$ —— ⊗

$f_k = \mu_k \underline{N}$ —— ⊗

$$N = mg\cos 30 = 400 * \overset{5}{\cancel{10}} * \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$\therefore f_k = \mu_k \cdot N = 0.1\,(400 * 5 * \sqrt{3}) = 340\,N$$

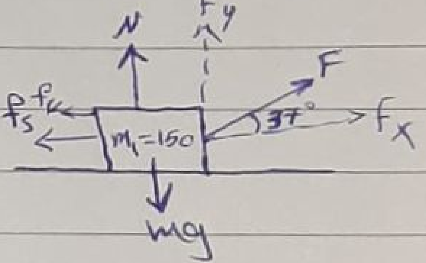
$$mg\sin\theta - f_k = ma$$
$$400 * 10 * 0.5 - 340 = 400\,a$$
$$2000 - 340 = 400\,a \Rightarrow a = \frac{1660}{400} = 4.15\ m/s^2$$

مثال :- وضع جسم كتلته (150kg) على سطح افقي أثرت فيه قوة ساحبة (300N) تعمل زاوية (37°) فوق الافق جعلته على وشك الحركة احسب :-

① معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والسطح الافقي .

② تعجيل الجسم لو تضاعفت القوة المؤثرة فيه ومعامل الاحتكاك الانزلاقي يكون مقداره ($\mu_k=0.1$) .

الحل :-



1) $\Sigma F_x = 0$

$$f_s - F_x = 0$$

$$f_s = F_x \Rightarrow f_s = F\cos\theta$$

$$f_s = 300 * \frac{4}{5} = 240\,N$$

$$f_s = \mu_s N$$
$$240 = \mu_s * 1320$$

$$\mu_s = \frac{240}{1320} = 0.18$$

$$\Sigma F_y = 0$$
$$N + F_y - mg = 0$$
$$N = mg - F_y$$
$$N = mg - F\sin\theta$$
$$N = 150 * 10 - 300 * \frac{3}{5}$$
$$N = 1320\,N$$

2) $F = 600\ ,\ \mu_k = 0.1$.

$$\Sigma F_x = ma$$
$$f_x\cos\theta - f_k = ma$$

$f_k = \mu_k \underline{\underline{N}}$

$\Sigma F_y = 0$

$N + F\sin\theta - mg = 0$

$N = mg - F\sin\theta = 150 * 10 - 600 * 0.6 = 1140\ N$

$f_k = \mu_k N = 0.1 * 1140 = 114\ N$

$\Sigma F_x = ma$

$F\cos\theta - f_k = ma$

$480 - 114 = 150\,a \Rightarrow 366 = 150\,a \Rightarrow a = 2.44\ m/s^2$

الوحدة الخامسة

الطاقة والقدرة

Energy and Power

1. الشغل Work

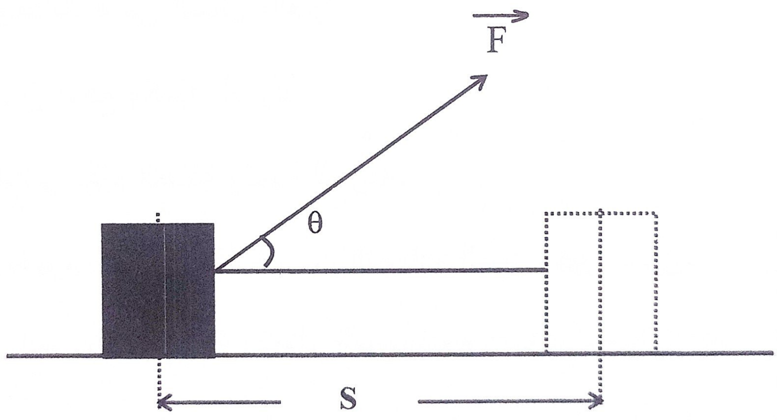
عزيزي الدارس،،

بعد أن عرفنا علاقة الشغل بالطاقة، نناقش الآن الشغل الذي تبذله القوى، وقد تكون هذه القوى ثابتة في المقدار والاتجاه أو متغيرة في أحدهما.

1.1 الشغل الذي تبذله قوة ثابتة

إذا أثرت قوة $\vec{F}$ ثابتة مقداراً واتجاهاً على جسم فانتقل هذا الجسم بتأثير هذه القوة مسافة مقدارها S باتجاه يضع زاوية θ مع اتجاه القوّة كما في الشكل (1)، فإن الشغل (W) الذي تبذله هذه القوة يعطى بالعلاقة:

الشكل (1)



$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\theta \quad \text{...(1)}$$

إذا ما تفحصنا المعادلة (1) سنجد أن الشغل يكون أكبر ما يمكن عندما يكون $\cos\theta = 1$، أي عندما $\theta = 0$، وهذا يتم عندما تكون القوة باتجاه حركة الجسم، وينعدم الشغل عندما يكون $\cos\theta = 0$، أي عندما $\theta = 90°$، ويحدث هذا عندما تكون القوة $\vec{F}$

باتجاه عمودي على الإزاحة، أما إذا كانت $\cos\theta = -1$، أي عندما $\theta = 180°$، فإن الشغل الناتج يكون سالباً، وهذا يحدث إذا كانت القوة $\vec{F}$ معاكسة تماماً لاتجاه حركة الجسم، كما هو الحال عند وجود قوى الاحتكاك.

مما تقدم نلاحظ أن الشغل كمية قياسية وليس كمية متجهة ووحدة قياسه في النظام الدولي (نيوتن. متر) (N. m) وتسمى بالجول ويرمز له بالرمز (J).

مثال (1)

تؤثر قوة ثابتة مقدارها 100N باتجاه يصنع زاوية مقدارها 60° مع الأفق على جسم موضوع على سطح أفقي أملس فتسحبه مسافة 20m، أحسب الشغل الناتج عن هذه القوة.

الحل:

من العلاقة (1) لدينا:

$$W = FS\cos\theta$$
$$= (100)(20)(\cos 60) = 1000J$$

مثال (2)

تؤثر قوة مقدارها 60N، تميل عن الأفق بزاوية 37°، على جسم كتلته 20kg موضوع فوق سطح أفقي خشن فتحركه مسافة 5m، إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الجسم والسطح 0.2، أحسب:

أ. الشغل الذي تبذله القوة الثابتة.

ب. الشغل الذي تبذله القوة العمودية.

جـ. الشغل الذي تبذله قوة الاحتكاك.

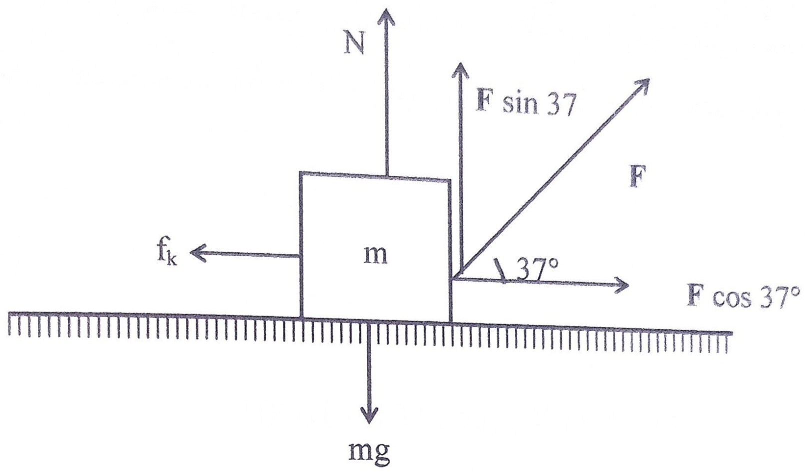
د. الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية.

هـ. الشغل الكلي المبذول على الجسم.

الحل:

الشكل (2) يوضح القوى المؤثرة على الجسم، حيث قمنا بتحليل القوة $\overrightarrow{F}$ إلى مركباتها الأفقية والعمودية.

الشكل (2)



أ. الشغل الناتج عن القوة الافقية الثابتة (W_F) هو:

$$W_F = FS\cos 37$$
$$= (60)(5)(0.8)$$
$$= 240J.$$

ب. الشغل الناتج عن القوة العمودية (W_N) هو:

$$W_N = NS\cos 90 = 0$$

جـ. الشغل الناتج عن قوة الاحتكاك W_f هو:

$$W_f = F_k\, S\cos 180$$
$$= \mu_k\, N\, S\cos 180$$

ولحساب N وحيث أنه لا يوجد تسارع للجسم في الاتجاه العمودي، فإن مجموع القوى العمودية يساوي صفراً أي أن:

$$N + F\sin 37 - mg = 0$$

ومنها نجد:

$$N = mg - F\sin 37$$
$$= (20)(9.8) - (60)(0.6) = 160N$$

وبذلك فإن شغل قوة الاحتكاك:

$$W_f = \mu_k \; N \; S \cos 180$$
$$= (0.2)\,(160)\,(5)\,(-1) = -160 \text{ J}$$

د. شغل الجاذبية الأرضية (W_g) هو:

$$W_g = mgS \cos (90) = 0$$

هـ. الشغل الكلي المبذول (W_{Tot}) هو:

$$W_{Tot} = W_F + W_N + W_f + W_g$$
$$= 240 + 0 - 160 + 0 = 80\text{J}$$

التدريب (1)

يجر صبي عربة بقوة مقدارها 40N تميل عن الأفق بزاوية مقدارها 30° لمسافة 100m. جد مقدار الشغل الذي يبذله الصبي.

مثال (3)

ينزلق جسم كتلته 5kg على مستوى مائل بزاوية 53° مسافة 3m، الشكل (3)، إذا علمت أن معامل الاحتكاك الحركي بين الجسم والمستوى 0.2، أحسب:

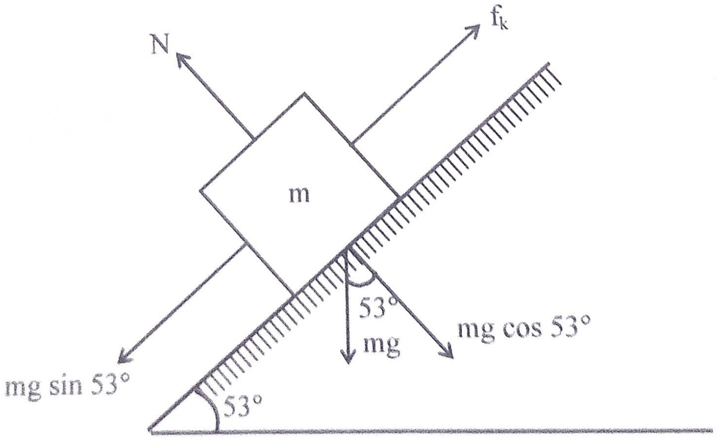
الشكل (3)

أ. شغل قوة الجاذبية.

ب. شغل القوة العمودية.

جـ. شغل قوة الاحتكاك.

د. الشغل الكلي المبذول على الجسم.



الحل:

أ. يحسب شغل الجاذبية (W_g) من العلاقة:

$$W_g = (mg \sin 53°)(S)(\cos 0)$$
$$= (5)(9.8)(\sin 53)(3)(1)$$
$$= 117.6 \text{ J.}$$

ب. شغل القوة العمودية (W_N) هو:

$$W_N = N\, S \cos 90 = 0$$

جـ. شغل قوة الاحتكاك (W_f) هو:

$$W_f = f_k\, S \cos (180)$$
$$= \mu_k N\, S \cos (180)$$

ولحساب القوّة العمودية (N) وحيث أنه لا يوجد تسارع باتجاه عمودي على مستوى السطح المائل فإن:

$$N = mg \cos \theta = (5)(9.8)(\cos 53) = 29.4 \text{ N}$$

وبذلك فإن:

$$W_f = \mu_k N\, S \cos (180)$$
$$= (0.2)(29.4)(3)(-1)$$
$$= -17.64 \text{ J}$$

د. الشغل الكلي (W_{Tot}) هو:

$$W_{Tot} = W_g + W_N + W_f$$
$$= 117.6 + 0 - 17.64 = 99.96 \text{ J}$$

?

1. تؤثر القوة الثابتة $\vec{F} = (2\hat{i} - 4\hat{j})\ N$ على جسم فتغير موضعه من $\vec{S_1} = (3\hat{i} + 5\hat{j})\ m$ إلى $\vec{S_2} = (\hat{i} - 6\hat{k})\ m$، أحسب الشغل الناتج عن هذه القوة؟

2. ما الزاوية التي تؤثر بها قوة ثابتة مقدارها 60N على جسم فتحركه مسافة 5m إذا كان الشغل الناتج عن هذه القوة يساوي 150J.

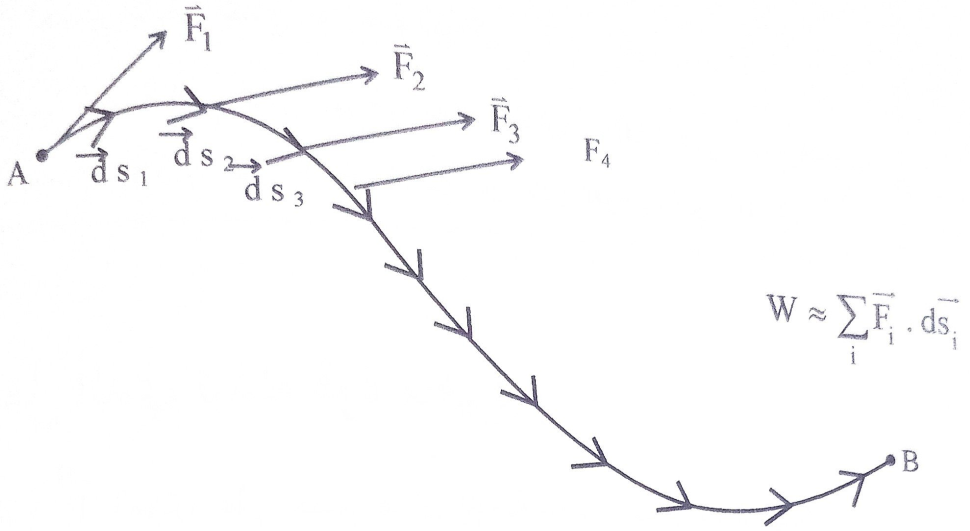
2.1 الشغل الذي تبذله قوة متغيرة

إذا كانت القوة $\vec{F}$ المؤثرة على جسم خلال إزاحة معينة متغيرة، فإنه يمكن حساب عنصر من عناصر الشغل المبذول في تحريك الجسم مسافة متناهية في الصغر $d\vec{S}$ من العلاقة (1) كما يلي:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

حيث افترضنا هنا أن القوة $\vec{F}$ كانت ثابتة خلال الإزاحة المتناهية في الصغر، ولحساب الشغل الكلي المبذول عند إزاحة الجسم من الموضع A إلى الموضع B، الشكل (4)، فإننا نجزئ الإزاحة الكلية إلى عدد كبير من الإزاحات، ونحسب عنصر الشغل المبذول في كل منها، ويكون الشغل الكلي هو:

الشكل (4)



وإذا ما كانت الإزاحات $d\vec{S}_i$ متناهية في الصغر، فعندما يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$W = \lim_{d\vec{s} \to 0} \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i$$

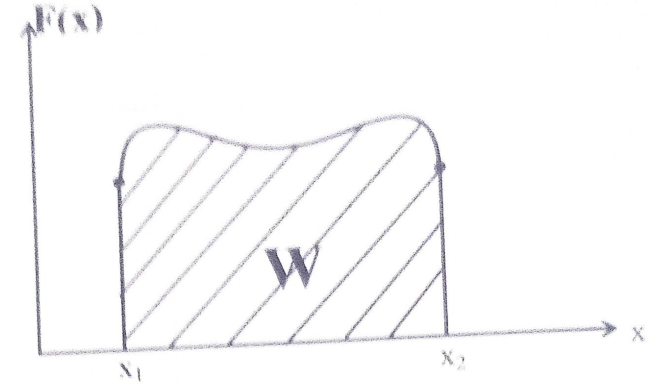
أو:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{..........} (2)$$

وتنطبق هذه العلاقة في الحالة الخاصة عندما تكون $\vec{F}$ في الاتجاه x وتكون الإزاحة $d\vec{s}$ على المحور x، الشكل (5) حيث تأخذ العلاقة السابقة الشكل التالي:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx \quad \text{..........} (3)$$

الشكل (5)



وفي هذه الحالة فإن المساحة تحت المنحنى F(x) والمحصورة بين x_1 و x_2 تمثل كمية الشغل المبذول من هذه القوة المتغيرة.

مثال (4)

يخضع جسم لتأثير قوة متغيرة تعمل في اتجاه المحور x كما هو مبين في الشكل (6)، احسب الشغل الذي تبذله هذه القوة خلال الفترات التالية:

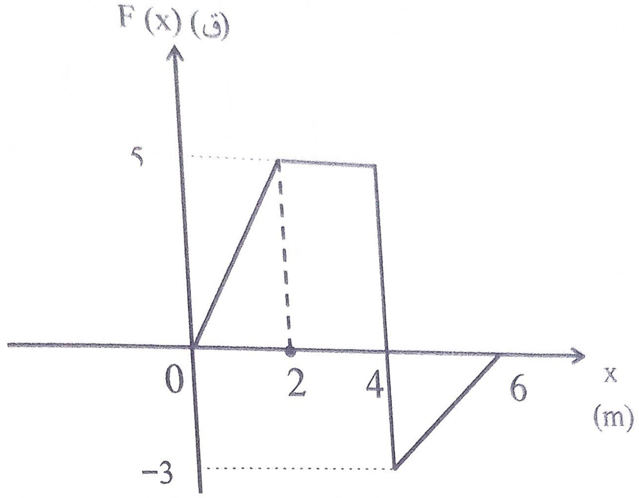
أ. من $x = 0$ إلى $x = 2$.

ب. من $x = 2$ إلى $x = 4$.

جـ. من $x = 4$ إلى $x = 6$.

د. الشغل الكلي.

الشكل (6)



أ. الشغل في الفترة من x = 0 إلى x = 2 يساوي عددياً مساحة المثلث:

$$w_1 = \frac{1}{2}(2)(5) = 5J$$

ب. الشغل في الفترة من x = 2 إلى x = 4 يساوي مساحة المستطيل.

$$w_2 = 2\,(5) = 10J$$

جـ. الشغل في الفترة من x = 4 إلى x = 6 يساوي عددياً المساحة السالبة للمثلث:

$$w_3 = -\frac{1}{2}(2)(3) = -3J$$

د. الشغل الكلي المبذول هو:

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$
$$= 5 + 10 - 3 = 12\ J$$

◂◂ **مثال (5)**

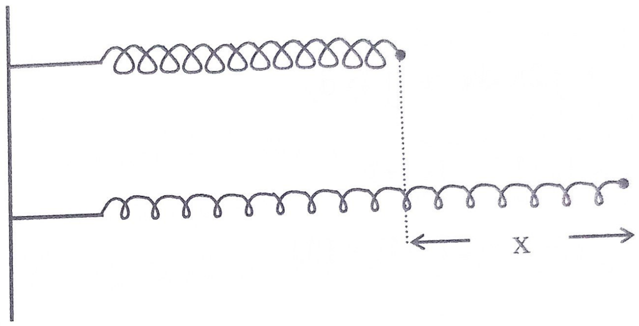
احسب الشغل الذي تبذله قوة المرونة في الزنبرك عند سحبه مسافة x عند وضع الاتزان، الشكل (7).

الحل:

إن قوة المرونة في الزنبرك تتناسب مع الإزاحة x وفي الاتجاه المعاكس:

$F = -k\,x$

الشكل (7)



حيث k هو ثابت المرونة للزنبرك (spring constant) وبالتالي فإن الشغل الناتج عن قوة المرونة في الزنبرك هو:

$$W_s = \int_0^x -kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{...(4)}$$

وهذا يعني أن أي قوة خارجية تعمل لإزاحة الزنبرك مسافة x عن وضع الاتزان يجب أن تكون بعكس اتجاه قوة الزنبرك، وبالتالي فإن الشغل الناتج عن هذه القوة الخارجية هو:

$$W = \int_0^x -kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

مثال (6)

احسب الشغل الذي تبذله القوة $\overrightarrow{F} = \left(2x\hat{i} + 4y\hat{j}\right) N$ عندما تؤثر على جسم فتحركه من الموضع الابتدائي $(1, 2)\ m$ إلى الموضع النهائي $(-2, 3)\ m$.

الحل:

$$W = \int_{s_2}^{s_1} \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{s} = \int \left(2x\hat{i} + 4y\hat{j}\right).\left(dx\hat{i} + dy\hat{j}\right)$$

$$= \int_{1}^{-2} 2x\,dx + \int_{2}^{3} 4y\,dy$$

$$= \left[x^2\right]_1^{-2} + \left[2y^2\right]_2^{3}$$

$$= (4-1) + 2\,(9-4) = 13J$$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1. ما مقدار الشغل الذي تبذله القوة: $F\,(x) = (2x + 2)\ N$ على جسم عندما تغير موضعه من: $x = 2m$ إلى $x = 5m$.
2. احسب الشغل الناتج عن القوة: $\overrightarrow{F} = \left(3x\hat{i} + 7y\hat{j}\right) N$ عندما تغير موقع الجسم من النقطة (1.2) إلى النقطة (3.4).

2. الشغل والطاقة الحركية

Work and Kinetic Energy

(نظرية الشغل والطاقة)

عزيزي الدارس

تعرّف الطاقة الحركية لجسم بأنها: مقدرة الجسم على إنجاز شغل نتيجة حركته، وهي تتناسب طرديا مع كتلة الجسم ومع مربع سرعته، فإذا تحرك جسم كتلته m بسرعة $\overrightarrow{\upsilon}$ فإن طاقته الحركية (k) تعطى بالعلاقة:

$$K = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \quad \text{.......} (5)$$

ولدراسة العلاقة بين الطاقة الحركية والشغل نفترض جسما كتلته m يتحرك على خط مستقيم تحت تأثير قوة كلية ثابتة $\overrightarrow{F}$ باتجاه حركة الجسم، بحيث تتغير سرعته من سرعة ابتدائية υ_i إلى سرعة نهائية υ_f، وإذا حصل للجسم إزاحة $\overrightarrow{S}$ ، عندئذ يكون شغل هذه القوة هو:

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S} = FS \quad \text{.......} (6)$$

وحيث أن الجسم يتسارع فإن القوة المؤثرة عليه هي:

$$F = ma$$

وبتعويض هذه العلاقة في العلاقة (6) نحصل على:

$$W = maS \quad \text{.......} (7)$$

ومن قوانين الحركة المنتظمة في خط مستقيم لدينا:

$$\upsilon_f^2 = \upsilon_i^2 + 2aS$$

ومن هذه العلاقة نحصل على:

$$aS = \frac{1}{2}\left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right)$$

وبتعويض قيمة aS هذه في العلاقة (7) نحصل على:

$$W = \frac{m}{2}\left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\, \upsilon_f^2 - \frac{1}{2} m \upsilon_i^2$$

$$= K_f - K_i$$

أو:

$$W = K_f - K_i = \Delta K \quad \text{.......................} (8)$$

إذن: إذا أثرت قوة في جسم، فإن الشغل الذي تنجزه هذه القوة عند تحريك الجسم يساوي التغير في طاقة الجسم الحركية.

وتسمى العلاقة (8) بنظرية الشغل والطاقة. (Work Energy Theorem).

وعلى الرغم من أننا اشتققنا نظرية الشغل والطاقة باعتبار أن القوة الكلية ثابتة إلا أنها صحيحة حتى لو كانت القوة متغيرة، ولا ثبات ذلك فإن الشغل الناتج عن قوة متغيرة يعطى من العلاقة (2):

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

ويمكن أن نعبر عن القوة $\vec{F}$ والإزاحة $d\vec{S}$ كما يلي:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

ولكن

$$d\vec{S} = \vec{\upsilon}\, dt$$

وبذلك فإن الشغل يساوي:

$$W = \int m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} . \vec{\upsilon} dt$$

$$= \int m \, \vec{\upsilon} . d\vec{\upsilon}$$

$$= m \int_{\upsilon_i}^{\upsilon_f} \upsilon d\upsilon$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 \right)$$

$$= K_f - K_i$$

أو:

$W = K_f - K_i = \Delta K$
وهي نفس العلاقة (8) التي اشتققناها لقوة ثابتة.

مثال (7)

يتحرك جسم كتلته 2kg بسرعة مقدارها 3m/s، فإذا أثرت عليه قوة حتى أصبحت سرعته 5m/s، أحسب:

أ. الطاقة الحركية الابتدائية والنهائية.

ب. الشغل الذي تبذله القوة.

الحل:

أ. $K_i = \frac{1}{2} m \upsilon_i^2 = \frac{1}{2} (2)(3)^2 = 9J$

ب. $K_f = \frac{1}{2} m \upsilon_f^2 = \frac{1}{2} (2)(5)^2 = 25J$

$W = K_f - K_i = 25 - 9 = 16J$

جـ.

مثال (8)

ما هو شغل القوة المؤثرة على جسم كتلته 0.5kg عندما تتغير سرعته من $\vec{\upsilon_i} = (3\hat{i} + 2\hat{j})m/s$ إلى $\vec{\upsilon_f} = 5\hat{j}\ m/s$.

الحل:

$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0.5)\left[25 - 13\right]$$

$$= 3J$$

التدريب (2)

تؤثر قوة مقدارها 5N على جسم كتلته 2kg يتحرك بسرعة 4m/s فإذا تغيرت سرعته إلى 6m/s فما المسافة التي قطعها خلال تأثير هذه القوة عليه.

التدريب (3)

جسم ساكن كتلته 4kg يرفع رأسيا إلى أعلى بقوة ثابتة مقدارها 60N.

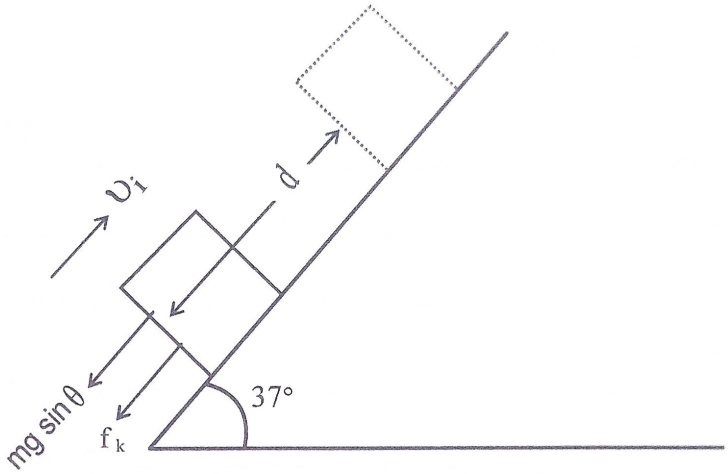
أ) ما هو الشغل الكلي المبذول على الجسم إذا رفع مسافة 2m.

ب) ما هي سرعته عند نهاية المسافة 2m؟

مثال (9)

قذف جسم كتلته 2kg بسرعة ابتدائية مقدارها 6m/s عند أسفل سطح مائل يميل بزاوية 37° عن الأفق كما في الشكل (8)، إذا كانت قوة الاحتكاك الحركي f على السطح ثابتة وتساوي 6N، ما المسافة التي يمكن أن يقطعها الجسم قبل أن يسكن.

الشكل (8)



الحل:

إن الشغل الناتج عن مجموع القوى المؤثرة هو:

$$W = \Delta K = K_f - K_I$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right) = \frac{1}{2}(2)[0-36] = -36J$$

وحيث أن القوة الكلية المؤثرة في اتجاه حركة الجسم هي:

$$F = \sum F_i = -mg\sin\theta - f$$

$$= -(2)(9.8)(\sin 37) - 6$$

$$= -17.76\ N$$

وإذا افترضنا أن الجسم يقطع مسافة d قبل أن يسكن:

$$W = Fd$$

$$-36 = (-17.76)d$$

ومنها نحصل على قيمة d.

$$d = 2.03\ m.$$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

1. تؤثر مجموعة قوى مقدارها 100N على جسم فتحدث له إزاحة مقدارها 10m، ما مقدار التغير في الطاقة الحركية للجسم.

2. جسم كتلته 6kg موضوع على سطح أفقي خشن تؤثر به قوة شد مقدارها 200N تصنع زاوية مقدارها 60° مع الأفق. إذا تغيرت سرعة الجسم من السكون إلى سرعة نهائية 10m/s، فما مقدار معامل الاحتكاك الحركي بين الجسم والسطح، علماً بأن الجسم تحرك مسافة 2m.

3. القدرة Power

عزيزي الدارس،،

كما اتضح لنا حتى الآن لم نلاحظ ظهور الزمن في حساباتنا عن الشغل، مما يجعل الشغل المبذول تحت تأثير قوة ما هو نفسه سواء أنجز هذا الشغل في بضع ثوان أو دقائق أو ساعات، إلا أن عامل الزمن له أهميته الكبرى في كثير من الحالات التي يُطلب فيها أن ينجز الشغل في وقت محدد أو بسرعة محددة. وبذلك نعرف متوسط القدرة $\overline{p}$ على أنه الشغل المبذول في فترة زمنية Δt.

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

وعندما يؤول Δt إلى الصفر فإننا نعرف القدرة اللحظية p على أنها معدل التغير في الشغل بالنسبة للزمن وفقاً للعلاقة التالية:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (9)$$

واضح من هذه العلاقة أن وحدة قياس القدرة هي (J/s) وتعرف بالوات (Watt) ويرمز لها بالرمز (w).

ويمكن التعبير عن القدرة اللحظية بدلالة القوة والسرعة كما يلي:

$$\boxed{p = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{s}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \qquad (10)}$$

مثال (10)

ما متوسط قدرة رجل كتلته 60kg يصعد بواسطة حبل معلق رأسيا مسافة 6m خلال زمن قدره 5s؟

الحل:

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{mg\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{(60)\,(9.8)\,(6)}{5}$$

$$= 705.6\,W$$

مثال (11)

تتحرك دراجة نارية على طريق أفقي بسرعة ثابتة مقدارها 30m/s، فإذا كانت قوة الاحتكاك المؤثرة في الدراجة تساوي 25N، ما قدرة محركها؟

الحل:

$$P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\upsilon}$$

$$= (25)\,(30)$$

$$= 750\ W$$

التدريب (4)

مضخة مياه قدرة محركها 1000W، ما كتلة الماء الذي يمكن ضخّه في كل ثانية من بئر عمقه 20m إذا كان التغير في طاقة حركة الماء يساوي صفراً.

4. الشغل وطاقة الوضع

Work and Potential Energy

عزيزي الدارس،،

بعد أن درسنا مفهوم الطاقة الحركية لجسم متحرك ووجدنا أن الجسم تتغير طاقته الحركية عندما يبذل عليه شغل، ننتقل الآن إلى نوع آخر من أنواع الطاقة الميكانيكية وهو طاقة الوضع. فعند رفع جسم في مجال الجاذبية الأرضية مسافة رأسية y، فإن القوة الخارجية المطلوب التأثير عليه بها تساوي وزن الجسم، وبذلك فإن هذه القوة الخارجية تنجز شغلاً مقداره.

$$W = mgy$$

أما شغل قوة الجاذبية نفسها فيكون سالباً أي أن:

$$W_g = -mgy \qquad (11)$$

إن هذا الشغل السالب لقوة الجاذبية الأرضية يختزن في الجسم على هيئة طاقة وضع، عندما يصعد مسافة y مقدارها:

$$U_g = mgy$$

اعتبر الآن أن الجسم عندما يكون على ارتفاع y_i من سطح الأرض يمتلك طاقة وضع ابتدائية مقدارها:

$$U_i = mgy_i$$

فإذا ما صعد إلى ارتفاع آخر y_f فإن مقدار طاقته النهائية هي:

$$U_f = mgy_f$$

ولكن من المعادلة (11) فإن شغل الجاذبية عندما يرتفع الجسم من الموضع الابتدائي y_i إلى الموضع النهائي y_f هو:

$$\begin{aligned} W_g &= -mg(y_f - y_i) \\ &= U_i - U_f \end{aligned}$$

أي أن علاقة الشغل بطاقة الوضع هي:

$$W_g = -\Delta U = -(U_f - U_i) \qquad \text{(12)}$$

وكتطبيق آخر على طاقة الوضع اعتبر جسماً مربوطاً بنهاية زنبرك ثابت مرونته k موضوع بشكل أفقي فإذا ما أزيح الجسم مسافة x عن وضع الاتزان فإن الشغل الذي يبذله الزنبرك (W_s)(مثال 5 المعادلة 4) يساوي:

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2$$

وهذا الشغل يتحول إلى طاقة وضع مختزنة في الزنبرك:

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

على اعتبار أن طاقة الوضع عند نقطة الاتزان هي صفر، وإذا ما سحبنا الجسم من موضع ابتدائي x_i إلى موضع نهائي x_f عن موضع الاتزان، فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} W_s &= -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) \\ &= U_i - U_f \end{aligned}$$

أي أن:

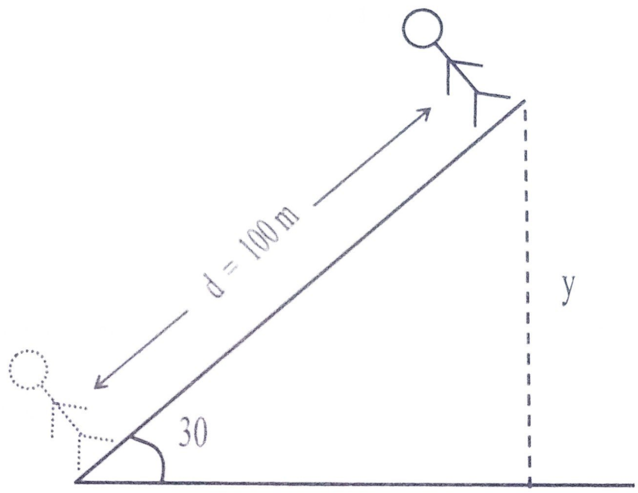
$$W_s = -\Delta U_s = -\left(U_f - U_i\right) \qquad \text{(13)}$$

وأخيراً تجدر الإشارة هنا إلى أن طاقة الوضع الصفرية لا تكون بالضرورة عند مستوى سطح الأرض في مجال الجاذبية الأرضية أو تكون صفرا عند موضع الاتزان للزنبرك، فطاقة الوضع الصفرية هي مسألة اختيارية، أي يمكن تحديدها عند أي موضع، وما يهمنا هو الفرق بين طاقة الوضع الابتدائية والنهائية للجسم.

مثال (12)

يتزلج شخص كتلته 50kg على منحدر ثلجي مائل بزاوية 30° مسافة 100m، الشكل (9).

الشكل (9)



احسب:

أ. طاقة وضعه الابتدائية. ب. طاقة وضعه النهائية.

ج. شغل قوة الجاذبية.

الحل:

إذا اعتبرنا أن طاقة الوضع تساوي صفراً عند أسفل السطح المائل فيكون لدينا:

أ)

$$U_i = mgy$$

$$= mgd \sin 30$$

$$= (50)(9.8)(100)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 24500\ J$$

ب)

$$U_f = 0$$

ج)

$$W_g = -\Delta U$$

$$= -(U_f - U_i)$$

$$= -(0 - 24500)$$

$$= 24500\ J$$

مثال (13)

احسب الشغل الذي تنجزه قوة المرونة في زنبرك: ثابت مرونته $500\,\frac{N}{m}$، عند سحبه مسافة 10cm عن موضع الاتزان.

الحل:

إذا اعتبرنا أن طاقة الوضع في الزنبرك تساوي صفراً عند موضع الاتزان فإن:

$$W_g = -(U_f - U_i) = -(\frac{1}{2}kx^2 - 0)$$

$$= -\frac{1}{2}(500)(0.1)^2 = -2.5J$$

أسئلة التقويم الذاتي (4)

؟

1. ما مقدار شغل قوة الجاذبية عندما يصعد جسم كتلته 2kg سطح مائل، يميل عن الأفق بزاوية 30°، ويتحرك عليه مسافة 10m.
2. في السؤال السابق إذا كان السطح المائل خشن ومعامل الاحتكاك الحركي له 0.3 فما مقدار شغل قوة الاحتكاك.

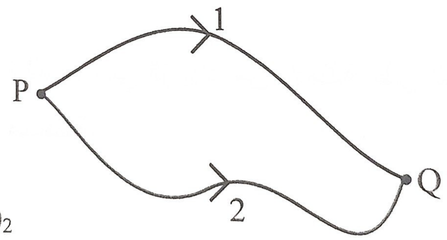
5. القوى المحافظة والقوى غير المحافظة

Conservative and Non conservative Forces

عزيزي الدارس

تعتبر القوة F قوة محافظة إذا كان الشغل الناتج عنها لا يعتمد على المسار الذي يسلكه الجسم أثناء الحركة. ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (10)، فإذا انتقل الجسم من النقطة p إلى النقطة Q عبر المسار (1) فإن الشغل المبذول عبر هذا المسار سيساوي الشغل المبذول عبر المسار (2)، أي أن:

الشكل (10)



$$(W_{pQ})_1 = (W_{pQ})_2$$

أو:

$$(W_{pQ})_1 = -(W_{QP})_2$$

ومنها نجد:

$$(W_{pQ})_1 + (W_{Qp})_2 = 0$$

وهذا يعني أن الشغل المبذول على المسار المغلق (PQP) يساوي صفراً.

وبما أن الشغل يعطى من العلاقة:

$$W = \oint \vec{F}.d\vec{s}$$

نستنتج من ذلك أن **القوة F إذا كانت محافظة يكون لدينا:**

$$W = \oint \vec{F}.d\vec{s} = 0 \quad \text{.......................................(14)}$$

وعندما لا تكون العلاقة (14) صحيحة فتكون القوة $\vec{F}$ هي قوة غير محافظة، أي أنه **للقوى غير المحافظة يكون لدينا:**

$$W = \oint \vec{F}.d\vec{s} \neq 0 \quad \text{.......................................(15)}$$

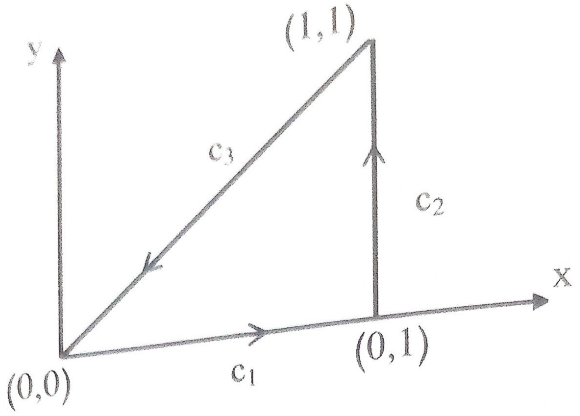
وهذا يعني أنه للقوى غير المحافظة فإن الشغل يختلف باختلاف المسار الذي يسلكه الجسم في حركته.

إن قوة الجاذبية الأرضية وقوة المرونة في الزنبرك من الأمثلة على القوة المحافظة، في حين أن قوة الاحتكاك قوة غير محافظة.

◄◄ مثال (14)

يتحرك جسم في المستوى xy تحت تأثير القوى $\vec{F} = (x\hat{i} - y\hat{j})$، حيث y, x تقاس بالمتر و F بالنيوتن، إذا تحرك الجسم من نقطة الأصل (0,0) إلى النقطة (1,1) ثم من (1,1) ليعود مرة أخرى إلى نقطة الأصل كما في المسار المبين في الشكل (11). بيّن فيما إذا كانت القوة F محافظة أو غير محافظة.

الشكل (11)



الحل:

نجد التكامل على المسار المغلق:

$$W = \oint \vec{F} . \vec{ds}$$

$$= \oint (x\hat{i} - y\hat{j}) . (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$= \oint (xdx - ydy)$$

$$= \int_{c_1} (xdx - ydy) + \int_{c_2} (xdx - ydy) + \int_{c_3} (xdx - ydy)$$

ولكن عبر المسار c_1 لدينا $y = 0, dy = 0$

وعبر المسار c_2 لدينا $x = 1, dx = 0$

وعبر المسار c_3 لدينا $x = y, dx = dy$

وبالتالي فإن التكامل أعلاه يمكن تبسيطه على النحو التالي:

$$W = \int_{c_1} xdx - \int_{c_2} ydy + 0$$

$$= \int_0^1 xdx - \int_0^1 ydy$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$W=\oint \vec{F}.d\vec{s}=0$$

أي أن:

وحيث أن التكامل على المسار المغلق يساوي صفراً فإن القوة F قوة محافظة.

أسئلة التقويم الذاتي (5)

?

تؤثر قوة $\vec{F}=4x\hat{i}-3y\hat{j}$ على جسم فتحركه من نقطة الأصل (0.0) إلى النقطة (3.4) بين فيما إذا كانت هذه القوة محافظة أم لا وذلك بإيجاد التكامل على المسارات التالية:

أ. المسار الأول: من النقطة (0,0) إلى (3.0) ثم إلى (3.4).

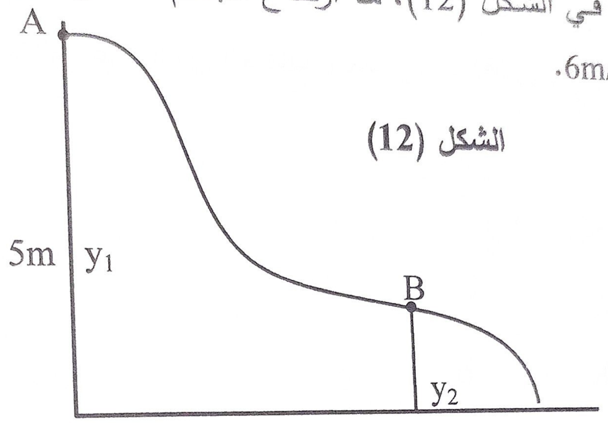
ب. المسار الثاني: من النقطة (0,0) إلى (0.4) ثم إلى (3.4).

$$E_i = E_f \quad \text{...} (19)$$

أي أن الطاقة الميكانيكية الابتدائية تساوي الطاقة الميكانيكية النهائية. وتمثل العلاقة (19) قانون حفظ الطاقة الميكانيكية.

مثال (15)

ينزلق جسم من السكون عند النقطة A الذي ترتفع 5m عن سطح الأرض على المسار المبين في الشكل (12)، ما ارتفاع الجسم عند وصوله النقطة B إذا كانت سرعته هناك 6m/s.



الشكل (12)

الحل:

إذا اعتبرنا أن طاقة الوضع عند مستوى سطح الأرض تساوي صفراً فإن من مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية نحصل على:

$$E_A = E_B$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgy_1 + 0 = mgy_2 + \frac{1}{2} m \upsilon_B^2$$

أو:

$$gy_1 = gy_2 + \frac{1}{2} \upsilon_B^2$$

$$(9.8)(5) = (9.8)\, y_2 + \frac{1}{2}(6)^2$$

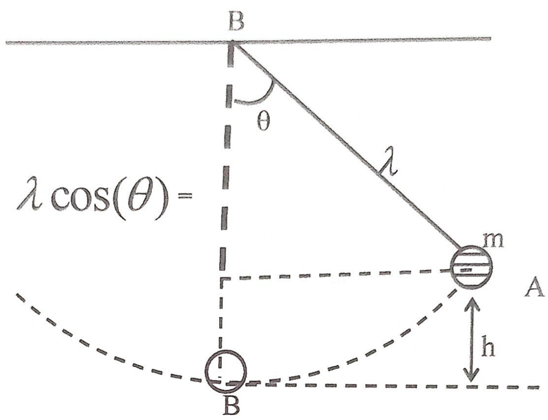
ومنها نحصل على:

$$y_2 = 3.16 \text{ m}$$

مثال (16)

الشكل (13) يمثل بندولاً بسيطاً كتلته m وطوله $\ell = 60$، ومثبت عند النقطة B. إذا أزيح البندول عن وضع الاتزان بزاوية $\theta = 20°$ وترك ليتحرك من السكون عند النقطة A، ما سرعة البندول عند وصوله النقطة B.

الشكل (13)



الحل:

بتطبيق قانون حفظ الطاقة الميكانيكية:

$$E_A = E_B$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

وباعتبار طاقة الوضع تساوي صفراً عند النقطة B نحصل على:

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m \upsilon_B^2$$

ومنها نجد:

$$\upsilon_B = \sqrt{2gh}$$

ويمكن التعبير عن h بدلالة طول الخيط ℓ كما يلي:

$$h = \ell - \ell \cos\theta = \ell\,(1-\cos\theta)$$

وبذلك فإن سرعة البندول عند B هي:

$$\upsilon_B = \sqrt{2g\ell\,(1-\cos\theta)}$$

$$= \sqrt{2(9.8)(0.6)(1-\cos 20)}$$

$$= 1.25 \text{ m/s}$$

التدريب (5)

قذفت كرة رأسيا إلى أعلى بسرعة 15m/s، ما هي سرعة الكرة على ارتفاع 8m من نقطة القذف؟

أسئلة التقويم الذاتي (6)

1. يتحرك جسم كتلته 0.2kg بسرعة أفقية 80m/s نحو زنبرك موضوع بشكل أفقي على سطح أملس، إذا كان معامل المرونة للزنبرك 800N/m. ما أقصى مسافة يمكن أن ينضغط فيها الزنبرك.

2. يسقط جسما كتله 5kg من ارتفاع رأسي 20m ويصل إلى سطح الأرض.

   أ. أحسب سرعته عند وصوله سطح الأرض.

   ب. إذا ارتد عن سطح الأرض بسرعة 4 m/s فما أقصى ارتفاع سيصل إليه.