تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

الخلاصة

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزاً مرموقاً في مجالات مختلفة ولها تطبيقات واسعة ، اذ تكمن اهميتها بكونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الانظمة كذلك فانها تعد ابسط واسهل انواع النماذج التي يمكن انشاؤها لمعالجة معضلات صناعية وتجارية وعسكرية واخرى ،فهي مجموعة من الاساليب الفنية التي يمكن بواسطتها الحصول على المقدار الكمي الامثل.في هذا البحث تعاملنا مع الحل ما بعد الامثلية post optimality او ما يعرف بتحليل الحساسية Sensitivity Analysis باستخدام مبدء اسعار الظل Shadow Prices ،ان الحل العلمي لاي مشكلة لايكون حلاً كاملاً بمجرد الوصول الى الحل الامثل ، ان اي تغيير في قيم ثوابت النموذج او ما يعرف بمدخلات النموذج الذي سيغير من مشكلة البرمجة الخطية وسيؤثر على الحل الامثل وعليه نحن بحاجة الى اسلوب يساعدنا في الوقوف على اثر تغير هذه الثوابت على الحل الامثل الذ تم التوصل اليه ، كذلك تم تناول مفاهيم عامة عن النموذج الثنائي وبعض النظريات المتعلقة بتحليل الحساسية واعتمدنا على بيانات حقيقية لشركة تنقل النفط الخام ومشتقاته وقد تم صياغة النموذج الرياضي لها والتوصل للحل الامثل باستخدام برنامج الحاسوب الجاهز winqsb ومن ثم حساب قيم اسعار الظل للقيود المستنفدة binding constraints ، اضافة لما ذكر اعلاه فقد استعرضنا في هذا البحث نموذج البرمجة الخطية في ظل البيئة الضبابية واستخدم فيه اسلوب جديد يعتمد على الاعداد الاولية prime numbers في حل معالم النموذج الضبابية.

الكلمات المفتاحية: البرمجة الخطية ،النموذج الثنائي،اسعار الظل، تحليل الحساسية،الاعداد الضبابية .

Sensitivity Analysis in Linear Programming with Real Application

Barraq Subhi Kaml

Ministry of Higher Education & Scientific Research

Received: 8May 2016 Accepted: 5 June 2016

Abstract

linear programming occupies at the present time a prominent place in different areas and have wide applications, where lies its importance as a means of studying the behavior of a large number of systems as well as it is the simplest and easiest types of models that can be created to handle the dilemmas of industries and commercial, military, and other In this paper, we treated with the solution post optimality or as it's known Sensitivity Analysis by using the principle of Shadow Prices, The scientific solution to any problem not be a complete solution as soon as access to the best solution, That any change in the model (constants values) or what is known as input data will change the linear programming problem and will affect the best solution and we need to methods to help us in the style of standing on the effect of changing these constants on the best solution tastiest reached It was addressed general concepts of dual model and Some theories of sensitivity analysis, we take real data from The Texago Corporation is a large, fully integrated petroleum company based in the U.S.A., formulated the mathematical model and obtain the optimal results by package winqsb and finally calculated the Shadow Prices for binding constraints, Add to the above stated, we reviewed in this paper linear programming model under fuzzy environment and use a new method based on prime numbers

Keywords: linear programming, dual model, shadow prices, sensitivity analysis, fuzzy numbers.

المقدمة

ان من مزايا البرمجة الخطية في الوقت الحاضر انها مقبوله على نطاق واسع بأعتبارها اداة مفيدة في بحوث العمليات والعلوم الادارية وغيرها من العلوم ، وهناك عدد كبير من الشركات تستخدم هذا النوع في النمذجة لحل أنواع مختلفة من المشاكل العملية وتطبيقات تشتمل على مشاكل النقل، وتخطيط الإنتاج، ومشاكل في اتخاذ القرارات الاستثمارية، ومشاكل المزيج الانتاجي ومشاكل التخصيص وغيرها، وتتكون مشكلة البرمجة الخطية من علاقات خطية بين متغيرات القرار في مشكلة البحث، يتم تحديد دالة الهدف الخطية (على سبيل المثال) بتعظيم الارباح او تقليل الكلف ويمكن ان تقتصر متغيرات القرار لمنطقة حل معينة من قبل قيود مختلفة. واحدة من السمات المثيرة للاهتمام في البرمجة الخطية هي الثنائية او ما يعرف بالنموذج المقابل،اذ يمتلك تفسير اقتصادي مفيد ويستخدم على نطاق واسع في النظرية الاقتصادية. إضافة إلى كونه ذات أهمية نظرية، فهو يدخل في موضوع تحليل الحساسية في البرمجة الخطية، ومن المعروف جيداً ان في البرمجة الخطية القيم المثلى لمتغيرات النموذج الثنائي تفسر على انها اسعار ظل (قيم حدية) من معاملات الجانب الايمن من القيود.ان تحليل الحساسية في طريقة السمبلكس قد تم تطويرها بشكل جيد على اسس الامثلية ، اذ يتطلب ذلك القليل من الجهد الحسابي وادخلت هذه الطريقة في العديد من الابحاث والكتب منها [2].

وفي عام 2000 استعرض .James K [6] بعض النتائج المعروفة في هذا الموضوع ومدى صحة اسعار الظل وكيف يمكن حسابها بوجود او عدم وجود برامج جاهزة، كذلك في عام 2005 قدم Jan Stallaert [7] بحثاً بين فيه كيفية تغير الحل الامثل عند تغير الجانب الايمن من المشكلة الاصلية،وكيف ان الطريقة التي قدمها قد حددت متجه التغير الامثل كتغيير لكميات الموارد المتاحة واستخدم اسلوب خوارزمية التمحور والعلاقة بنتائج ما بعد الامثلية من طريقة -interior point .

النموذج الثنائي (المقابل Dual)

ان قيمة الموارد الاقتصادية المتاحة مقومة باسعار الظل تساوي قيمة دالة هدف النموذج او قيمة الارباح المثلى ويرتبط هذا بمفهوم النموذج الثنائي الذي يصاحب النموذج الاصلي سواءً كان يهدف الى تعظيم او تقليل دالة معينة ويوفر النموذج الثنائي كثير من المعلومات التي تفيد الادارة في مجال اتخاذ القرارات كما يقلل من العمليات الحسابية ويوفر الوقت والتكلفة في حالة اذا كان النموذج الثنائي يحتوي على عدد من القيود والمتغيرات اقل مما يحتويه النموذج الاصلي الخطي للمشكلة [1] . ونظراً لان النموذج الخطي الاصلي قد يهدف الى تعظيم الارباح الحدية وهذه الارباح الحدية تمثل عائد التكاليف المتغيرة الذي يمثل الفرق بين سعر بيع المنتجات وتكلفتها المتغيرة وكلما استطعنا ان نقلل هذه التكلفة المتغيرة فاننا نعظم الارباح الحدية ولذا يمكننا القول انه توجد علاقة وارتباط بين المدخلات (التكاليف) والمخرجات (اسعار المنتجات) وبالتالي ارباحها وعليه اذا كان النموذج الاصلي يهدف الى تعظيم الارباح ويهتم باختيار تشكيلة الانتاج المثلى (المخرجات) في ظل موارد او مدخلات اقتصادية محدودة وبالتالي لايمكن تعظيم الارباح من دون هذه الموارد ، النموذج الثنائي يهدف الى تقليل هذه الموارد المتاحة التي تساهم في تحقيق الارباح وتحديد اسعار الظل لهذه الموارد تحت قيود اساسية تشترط ان لاتقل تكلفة الموارد اللازمة لكل منتج باسعار ظلها عن الربح الحدي لكل منتج ولذلك يسعى النموذج الثنائي الى تحديد وتقليل اسعار ظل الموارد الاقتصادية المتاحة. يبنى النموذج الثنائي من الصيغة القياسية لمتباينات نموذج البرمجة الخطية وكما مبين في الجدول ادناه بشكل مصفوفات .

النموذج الاصلي (الاولي)	النموذج الثنائي (المقابل)
$\text{Maximize } z_p = cx$ s.t $Ax \le b$ $x \ge 0$	$\text{Minimize } z_D = \pi b$ s.t $\pi A \ge c$ $\pi \ge 0$

حيث ان :

A : تمثل مصفوفة المعاملات الفنية للنموذج الخطي بـ m من الصفوف و n من الاعمدة.

c, x: متجهات ذات بعد n .

π : متجه بـ m من المتغيرات في النموذج الثنائي.

Vol: 13 No:1 , January 2017
DOI : http://dx.doi.org/10.24237/djps.1301.167A
P-ISSN: 2222-8373
E-ISSN: 2518-9255

توجد العديد من العلاقات بين نتائج النموذج الاصلي والمشكلة الثنائية وهي ذات اهمية في تفسير النتائج.وقد ذهب Paul A.Jensen & Jonthan F.Bard عام 2003 [3] الى اعتبار هذه العلاقات كنظريات مع براهينها ، اذ ان x تمثل اي حل مقبول للنموذج الاصلي وان π هي اي حل مقبول للنموذج الثنائي ، x^* ، π^* الحلول المثلى ان وجدت لكل من النموذجين اعلاه.

نظرية 1 (الثنائية الضعيفة weak duality)

اذ كانت x تمثل الحل المقبول و $z_p(x)$ قيمة دالة الهدف التي تكون (تعظيم Maimize) للنموذج الاصلي وان π هي الحل المقبول و $z_D(x)$ قيمة دالة الهدف التي تكون (تقليل Minimize) للنموذج الثنائي ، فأن $z_p(x) \le z_D(x)$

1- ان الحل للنموذج الاولي يكون مقبولاً بواسطة الفرضية $Ax \le b$.
2- بضرب طرفي المعادلة اعلاه بـ π نحصل على $\pi Ax \le \pi b$
3- ان الحل للنموذج المقابل يكون مقبولاً بواسطة الفرضية $\pi A \ge c$.
4- بضرب طرفي المعادلة اعلاه بـ x نحصل على $\pi Ax \ge cx$.
5- عند جمع حاصلي الخطوتين 2 و 4 نحصل على $cx \le \pi Ax \le \pi b$ او $z_p(x) \le z_D(x)$

هناك العديد من العلاقات المفيدة التي يمكن اشتقاقها من النظرية اعلاه

- ان قيمة $z_p(x)$ لأية x هو الحد الادنى لـ $z_D(\pi^*)$.
- ان قيمة $z_D(x)$ لأية π هو الحد الاعلى لـ $z_p(x^*)$.
- ان كان هناك حلول مقبولة لـ x وكانت المشكلة الاصلية غير محدودة (unbounded) فان الحل يكون غير مقبول (no feasible) للمشكلة الثنائية π .
- ان كان هناك حلول مقبولة لـ π وكان النموذج الثنائي غير محدودة (unbounded) فان الحل يكون غير مقبول (no feasible) للمشكلة الاصلية x .

نظرية 2 (معيار المثالية الكافي sufficient optimality criterion)

لنفرض ان $z_p(x)$ تمثل دالة الهدف للنموذج الاولي وان $z_D(x)$ هي دالة الهدف للنموذج الثنائي . اذا كان $(\hat{\pi}, \hat{x})$ زوج من الحلول المقبوله لكل من النموذج الاولي والثنائي يحقق $z_p(\hat{x}) = z_D(\hat{\pi})$ فأن $\hat{x}$ هو الحل الامثل للنموذج الاولي و $\hat{\pi}$ الحل الامثل للنموذج الثنائي.

1- تحدد الامثلية للحل الاولي : $z_p(\hat{x}) \le z_p(x^*)$.
2- الحل المقبول للنموذج الثنائي بالنسبة للـ z_p , $z_p(\hat{x}) \le z_p(\pi^*)$
3- تحدد الامثلية للحل الثنائي : $z_D(\pi^*) \le z_D(\hat{\pi})$.

4- بجمع الخطوات اعلاه : $z_p(\hat{x}) \le z_p(x^*) \le z_D(\pi^*) \le z_D(\hat{\pi})$.

5- دوال الهدف بالفرض: $z_p(\hat{x}) = z_D(\hat{\pi})$.

6- بدمج الخطوتين 4 و 5 : $z_p(\hat{x}) = z_p(x^*) = z_D(\pi^*) = z_D(\hat{\pi})$.

وعليه تكون $\hat{\pi}$, $\hat{x}$ مثلى.

نخرج ببعض من الاستنتاجات للنظرية السابقة:

- اذا كانت دالتي الهدف متساوية فأن كلا الحلول المقبولة لكل من النموذج الاولي والثنائي هي مثلى.
- اذا كان x^* حل امثل للنموذج الاولي ، يوجد حل محدد امثل للنموذج الثنائي بدالة هدف $z_p(x^*)$
- اذا كان π^* حل امثل للنموذج الثنائي ، يوجد حل محدد امثل للنموذج الاولي بدالة هدف $z_D(\pi^*)$.

نظرية 3 (الثنائية القوية strong duality)

ان كان اياً من النموذج الاولي او الثنائي له حل مقبول امثل فأن النموذج الاخر له كذلك وقيم دوال الهدف لهما متساوية.

بعبارة اخرى ليكن للنموذج الاولي حل امثل $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ، وللنموذج الثنائي حل امثل ايضاً $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_n^*)$، فأن $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i^*$.

اسعار الظل (Shadow Prices)

تتميز الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية Simplex Method بتوفيرها لمعلومات عديدة لاتوفرها الطريقة البيانية ومنها اسعار الظل و كلفة الفرصة البديلة التي تعرف بأنها الأرباح المفقودة لأفضل بديل يأتي بعد البديل الذي تم اختياره اوهي قيمة نظرية متوقعة للبدائل المتخلى عنها كنتيجة لاختيار بديل معين ويوجد ثلاث انواع من هذه الكلف وهي:

1- تكلفة الفرصة البديلة الخارجية والمتمثلة بتكلفة الحصول على وحدة مورد الانتاج من خارج المؤسسة الانتاجية.

2- تكلفة الفرصة البديلة الداخلية وهي عبارة عن مقدار العائد الذي يمكن ان تحصل عليه المؤسسة ويساهم في تغطية التكاليف الثابتة وتحقيق الارباح.

3- تكلفة الفرصة البديلة الكلية وتشتمل على تكلفة الفرصة البديلة الخارجية (كلفة الحصول على مورد الانتاج) تكلفة الفرصة البديلة الداخلية (العائد الذي تحصل عليه المنشأة) ، وتعد ذات فائدة جليه في ترشيد قرار اضافة منتج جديد الى المزيج الانتاجي.

ان مفهوم سعر الظل لمورد يمكن ايجازه بانه مقدار الزيادة او النقصان في قيمة دالة الهدف نتيجة لزيادة او نقصان الكمية المتاحة من دلك المورد بمقدار وحدة واحدة حيث تؤدي هذه الزيادة الى زيادة الارباح الحدية ، ويطلق على تلك الزيادة في الارباح الناتجة عن الحصول على وحدة اضافية من احد الموارد مصطلح سعر ظل المورد، وتوجد طريقتان للحصول على اسعار الظل وهي

1- الطريقة غير المباشرة (طريقة الناتج الفرعي) :

اذ يمكن الحصول على اسعار الظل من القيم التي تظهر تحت المتغيرات الراكدة Slack Variables في الحل الامثل بجدول السمبلكس لمشكلة البرمجة الخطية الاولية (الاصلية).

2- طريقة النموذج الثنائي:

ويتم الحصول على اسعار الظل من خلال تحويل المشكلة الاصلية لنموذج البرمجة الخطية الى النموذج الثنائي الذي يهدف اساساً الى تحديد سعر الظل للموارد الاقتصادية المتاحة.

ان سعر الظل لقيد ما وليكن (i) هو معدل التغير في دالة الهدف كنتيجه لتغير قيمة المورد (b_i) المعروف بالجانب الايمن من القيد (i) . في الحل الامثل قيمة دالة الهدف في النموذج الاولي عند تساويها مع دالة الهدف في النموذج الثنائي يعبر عنها بالاتي [2] :

$Z^* = v^* = b^T\pi^*$ ، وبالتالي هذه العلاقة يمكن استخدامها لتبين السعر المرتبط بـ(b_i) عند القيمة المثلى (π^*) عند وصف الحل الابتدائي بالحل غير المنحل (non-degenerate) ووفقا لهذا المفهوم فان قيمة التغير الحاصلة في Z نتيجة لحدوث تغير في المورد (b_i) يمكن الحصول عليه بأستخدام المشتقة الجزئية (partially derivative) للدالة Z بالنسبة لـ b_i بمعنى $\frac{\partial Z}{\partial b_i} = \pi^*$.

من التعريف اعلاه يمكن تفسير π^* على انها السعر المرتبط بالجانب الايمن للقيود والمسمى بسعر الظل والذي ينسب الى Paul Samuelson 1965 .

التفسير الاقتصادي لاسعار الظل

ان الهدف من طريقة السمبلكس هو لتحديد الحل الاساسي المقبول والذي يستخدم الاسلوب الاكثر فعالية من حيث الكلفة. دالة الهدف للنموذج الثنائي تمثل الكلفة الاجمالية اي ان

$$v = \pi^T b = \sum_{i=1}^{m} \pi_i\, b_i$$

حيث π_i ، هو مضروب السمبلكس المرتبط بالمتغيرات الاساسية وان π^* يمثل الايرادات الضمنية للتعويض عن التكاليف المباشرة (سعر الظل) لكل مورد في ضوء المتغيرات الاساسية الابتدائية ، وبالتالي فأن $\pi_i b_i$ هي التعويض عن الكلف المباشرة $\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$.

بأستخدام التفسير اعلاه لدالة الهدف والمتغيرات للنموذج الثنائي v, π يمكننا من دراسة كل صف (j) من المشكلة الثنائية المطابق للعمود (j) للمشكلة الاصلية ، كل وحدة (j) من النشاط (او المنتج) في المشكلة الاولية يستهلك a_{ij} وحدة من المورد i .

بأستخدام اسعار الظل (الجانب الايسر) من القيد j, من المشكلة الثنائية $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, \pi_i$ هو كلفة ضمنية غير مباشرة من مزيج الموارد التي تستهلك او تنتج بواسطة وحدة واحدة من النشاط j ، من ناحية اخرى فأن الجانب الايمن من القيد (j)

Vol: 13 No:1 , January 2017
DOI : http://dx.doi.org/10.24237/djps.1301.167A
P-ISSN: 2222-8373
E-ISSN: 2518-9255

من المشكلة الثنائية هو الكلفة المباشرة للوحدة الواحدة من النشاط j ، وهذا يعني ان القيد j في النموذج الثنائي $c_j \geq \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i$ ، يمكن ان يقال له التكاليف الضمنية غير المباشرة للمواد المستهلكة بواسطة النشاط (j) ويجب ان لايزيد عن الكلف المباشرة c_j ،وان كانت هذه التكاليف بالضبط اقل من c_j فأنه لايدفع للاشتراك في النشاط (j) اي ان $c_j < \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i$ ، من جانب اخر فأن القيود في النموذج الثنائي المرتبطة بالمتغيرات غير الاساسية x_N ، ربما تحقق الحل المقبول او غير المقبول وهذا يعني $\bar{C} = C_N - N^T\pi$ ، اذ يمكن ان يكون $\bar{c}_j \geq 0$ فيكون القيد في النموذج الثنائي مقبول او $\bar{c}_j < 0$ فيكون القيد غير مقبول ، من وجهة نظر اقتصادية فأن $\bar{c}_j < 0$ يعني ان النشاط j يستخدم الموارد بصورة اقتصادية اكثر من اي نشاط اخر من مجموع الانشطة.

تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

يعرف تحليل الحساسية بأنه اسلوب يقيس اثر التغيرات في مدخلات نموذج القرار على مخرجاته اذ يمكن من خلاله دراسة التغيرات في قيم ثوابت النموذج وتحديد الى اي مدى يمكن لبعض هذه الثوابت ان يتذبذب قبل ان يصبح الحل الامثل المحدد سابقاً غير امثل وكلما ارتفعت درجة حساسية القرار بالنسبة للتغير في احدى ثوابت النموذج كلما تطلب ذلك بذل مزيد من الجهد والوقت لتقدير قيمة هذا الثابت بعناية حتى لا نبتعد كثيراً عن المثالية فيما بعد.

ان مصطلح تحليل الحساسية يدعى غي بعض الاحيان بتحليل ما بعد الامثلية ، معظم المشاكل الواقعية ذات بيانات ليست معروفة بشكل مؤكد على سبيل المثال كلف المواد الخام ربما تتغير بعد حل النموذج او التكاليف المستخدمة قد تكون مجرد تخمين لما ستكون في المستقبل ، الجانب الايمن من القيود قد يتغير بسبب زيادة او نقصان الموارد المتوفرة في السوق او المعاملات ربما تتغير بسبب تغير مواصفات المنتج. يعد تحليل الحساسية مهم لعدة اسباب:

1- ان استقرارية الحل الامثل قد تكون غير مرغوب بها في ظل تغيرات معالم النموذج.

2- كل من قيم معاملات دالة الهدف والقيود قد يكون مسيطر عليها الى حد ما عند بعض الكلف ، في هذه الحالة نرغب بمعرفة الاثار التي تنجم عن تغيير هذه القيم وما ستكون التكلفة لاجراء هذه التغيرات.

3- عندما تكون المعاملات غير مسيطر عليها فأن قيمتها قد تكون تقريبية وبالتالي فأنه من المهم معرفة لاي مدى يصبح التغير بتلك القيم يبقى الحل امثل او الحصول على تقديرات افضل.

A . ادخال (اضافة) متغير جديد

يفيد تحليل الحساسية في اقرار مدى جدوى اضافة متغير جديد الى الحل الذي تم التوصل اليه (من دون هذا المتغير)،وتحديد ما اذا كانت اضافته ستؤثر على امثلية الحل الاصلي ام لا.

بعد ان حدد الحل الامثل $x = x^*$ ، لنفترض اننا نريد اضافة متغير جديد وليكن x_{n+1} بمعامل كلفة c_{n+1} ومعاملات تقنية A_{n+1} فيكون نموذج البرمجة الخطية على النحو الاتي:

$$Minimize\ z = c^T x + c_{n+1}x_{n+1}$$

$s.t$

$$Ax + A_{n+1}x_{n+1} = b$$

$$x \geq 0\,, x_{n+1} \geq 0$$

ان اضافة متغير جديد الى النموذج لا يغير من الحل المقبول وذلك بجعله متغير غير اساسي وقيمته صفر عند الحدود الدنيا وبهذا يبقى الحل مقبول، ولكن الحل يتطلب ان يكون امثل اذ ان كلفة التقليل $\bar{c}_{n+1}$ المقابله للمتغير الجديد x_{n+1} قد تكون سالبة وللتحقق من الحل الامثل نحسب :

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - A_{n+1}^T\,\pi$$

اذا كان $\bar{c}_{n+1} \geq 0$ يكون الحل السابق بالمتغير $x_{n+1} = 0$ امثل ،اما في حال كون $\bar{c}_{n+1} < 0$ فبالامكان تحسين الحل بجعل المتغير x_{n+1} اساسي.

ان الحالة الاكثر عمومية عندما يمتلك المتغير الجديد x_{n+1} حدود دنيا وعليا بحيث $l_{n+1} \leq x_{n+1} \leq u_{n+1}$ اذ ان الحد الادنى ليس بالضرورة ان يكون صفراً والحد الاعلى ∞ .

B . ادخال (اضافة) قيد جديد

اذا فرضنا انه بعد التوصل الى الحل الامثل ظهرت الحاجة الى اضافة قيد جديد وقد تنشأ الحاجة الى اضافة القيد الجديد نتيجة لتغير الظروف المحيطة بالمؤسسة المنتجة والتي ادت الى تغير مواصفات بعض الموارد المتاحة وبالتالي تغير ذلك المنتج ، ومن البديهي ان القيد المضاف لن يوسع من منطقة الحل المقبول بل على العكس قد يقتطع منها وعليه فان دالة الهدف التي تم التوصل اليها قبل اضافة القيد الجديد تبقى على حالها او تتجه نحو الاسوأ، لنفترض ان القيد المراد اضافته يأخذ احدى الصيغ التالية:

$$A_{m+1}x = b_{m+1},$$

$$A_{m+1}x \leq b_{m+1}\ ,$$

$$A_{m+1}x \geq b_{m+1}\ ,$$

حيث ان $b_{m+1} \geq 0$.

من خلال وضع حدود مختلفة على المتغير x_{n+1} يمكن كتابة اياً من القيود اعلاه بالصيغة :

$$A_{m+1}x + x_{n+1}\ = b_{m+1},$$

ففي حالة القيد "$= b_{m+1}$" فأن $0 \leq x_{n+1} \leq 0$ ، واذا كان "$\leq b_{m+1}$" فأن قيمة المتغير هي $0 \leq x_{n+1} \leq \infty$ واخيراً عندما يكون القيد بالصيغة $b_{m+1} \geq 0$ فأن $-\infty \leq x_{n+1} \leq 0$ ، وان الكلفة c_{n+1}

المرتبطة بالمتغير x_{n+1} تساوي صفراً ، لكن ماذا لو كان الحل $x^* = x$ غير مقبول بعد اضافة القيد الجديد، يتم حل النموذج وتحسينه [2].

C . التغير في الجانب الايمن من القيود

من المهم والضروري ان توجد القدرة والامكانية لدراسة تاثير التغيرات التي تحدث في الجانب الايمن من القيود وخاصة تلك التي تحدد ما هي الموارد المتاحة، لنفرض ان لدينا الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية بالصيغة القياسية وان الجانب الايمن من القيد (q) يعطى بواسطة المعلمة (λ) وبقيمة معينة يكون b_q :

$$b(\lambda) = b + (\lambda - b_q)e_q$$

حيث ان e_q يمثل العمود (q) في المصفوفة المحايدة.

ان كانت قيمة المعلمة λ لم تجعل الحل الاساسي غير مقبول فأن الحل الاساسي المعدل يبقى امثل.

ان مجال قيم المعلمة λ في الجانب الايمن من القيد q والتي تبقي الحل الاساسي مقبولاً وامثل ، من خلال ايجاد قيم $x_B(\lambda)$ حيث ان

$$Bx_B(\lambda) = b(\lambda)$$

وان $x_B(\lambda) \geq 0$، مما سبق نحصل على

$$x_B(\lambda) = B^{-1}b + (\lambda - b_q)B^{-1}e_q$$

$$= x_B^* + (\lambda - b_q)B^{-1}e_q$$

اذ ان x_B^* يمثل الحل الامثل عندما $\lambda = b_q$ ، وللوصول للحل المقبول يتطلب ان تكون $x_B(\lambda) \geq 0$ ، ويحسب مجال المعلمة λ وفق الصيغة ادناه:

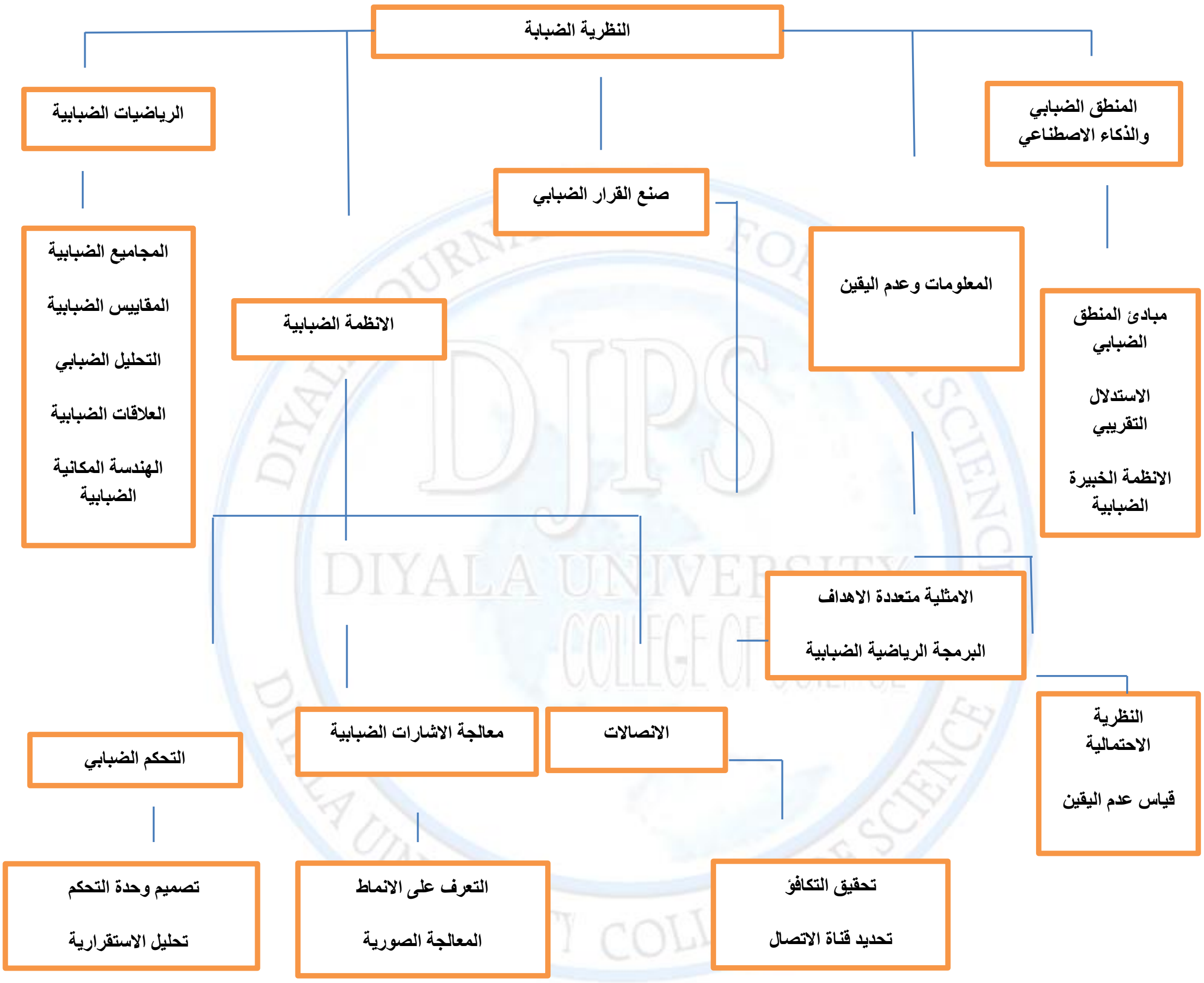
$$b_q + \max_{\beta_{iq}>0} \frac{-(x_B^*)_i}{\beta_{iq}} \leq \lambda \leq b_q + \min_{\beta_{iq}<0} \frac{-(x_B^*)_i}{\beta_{iq}}$$

حيث β_{iq} يمثل العنصر (i, q) من المصفوفة B^{-1} .

البرمجة الخطية الضبابية fuzzy linear programming

ان مفهوم المنطق الضبابي هو أحد أشكال المنطق، اذ يستخدم في بعض الأنظمة الخبيرة وتطبيقات الذكاء الاصطناعي Artificial intelligent، ابتكر العالم الأذربيجاني الأصل لطفي زادة عام 1965 هذا الاسلوب

حيث طوّره ليستخدمه كطريقة أفضل لمعالجة البيانات، لكن نظريته لم تلق اهتماماً حتى عام 1974 حيث استخدم في تنظيم محرك بخاري، ثم تطورت لتستخدم في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية وغيرها. من خلال النظر الى المخطط رقم (1) يتبين لنا أن النظرية الضبابية هي حقل واسع يضم مجموعة متنوعة من المواضيع البحثية.



مخطط رقم (1) يمثل تصنيف النظرية الضبابية (Wang 1997)

<u>تعريف (1)</u> : المجموعة الجزئية $\tilde{A}$ ، المجموعة الشاملة X ، يدعى مجموعة من الازواج $\tilde{A}=\{(\mu_{\tilde{A}}(x),x)\}$, حيث $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [1,0]$ ، والتي تعرف بدالة الانتماء للمجموعة الضبابية .

قيمة دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ للعنصر $x \in X$ تسمى درجة الانتماء.

- متممة الدالة الضبابية $\tilde{A}$, التي يرمز لها $\tilde{A}^c$, وهي مجموعة ضبابية يمكن كتابتها $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$.
- تقاطع مجموعتين ضبابيتين $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ والتي تعرف بالمجموعة $\tilde{C}$, وتكتب بالصيغة $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X$.
- اتحاد مجموعتين ضبابيتين $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ والتي تعرف بالمجموعة $\tilde{C}$, وتكتب بالصيغة $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X$.

<u>تعريف (2)</u> : المجموعة الضبابية $\tilde{A}$ تكون محدبة اذا ما تحقق الشرط ، $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y))$ ، $x, y \in X, \lambda \in [0,1]$.

<u>تعريف (3)</u> : الرقم الضبابي هو زوج مرتب من الدوال $(u(r), v(r))$, $r \in [1,0]$ التي تستوفي الشروط التالية [8] :

1- $u(r)$ ، دالة محددة متناقصة من الجهة اليسرى تقع ضمن الفترة $[1,0]$;

2- $v(r)$ ، دالة محددة متزايدة من الجهة اليمنى تقع ضمن الفترة $[1,0]$;

3- $v(r) \leq u(r)$, $r \in [1,0]$.

<u>تعريف (4)</u> : ليكن $\tilde{A}$, عدد ضبابي بالصيغة المثلثية (a, b, c), ، يمكن حساب دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ وكالاتي :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a},\ x \in [a,b] \quad , \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b,c], \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x \notin [a,c],$$

ان العدد الضبابي بالصيغة المثلثية (a, b, c), ، يمثل بالدالة

$$u(r) = \frac{cr-a}{b-a},\ r \in [a/c, b/c] ، \quad v(r) = \frac{c-rc}{c-b}, r \in [b/c, 1] .$$

صياغة العدد الضبابي بالاعتماد على الاعداد الاولية ضمن الفترة $[k_1, k_2]$ [9]:

<u>تعريف (1)</u>: ليكن العدد الاولي $P_j(a) \geq 0$ ، $a \geq 0$, $j \in Z$, ينتمي للفترة $[a, \infty)$ عند $j \geq 0$ او الفترة $[0, a)$ عند $j < 0$ ، $P_j(a) \geq 0$ عدد اولي من مجموعة من الاعداد الاولية عندما $a \geq 0$.

توجد هنالك العديد من الخصائص المهمة للعدد الاولي نوجزها ادناه :

1- $0 = P_0(0)$ ، $1 = P_0(1)$ ، $1 = P_1(0), 0 = P_{-1}(1)$;

2- $a = P_0(a)$ ، اذا كان $a \geq 0$ عدد اولي، $P_0(a)$ غير موجود اذا كان $a \geq 0$ عدد غير اولي;

3- $P_j(a) \le P_k(a)$, اذا $j \le k$, $P_j(a) < P_k(a)$, لكل $j < k$; $k \in Z$, $j \in Z$,

4- $P_j(a) = P_j(a+1) = \ldots = P_j(a+l)$ ، لكل $1 \le l < P_{j+1}(a) - P_j(a)$ ، $j = 0,1,2,\ldots$ ، $a \ge 0$;

5- $P_j(a) = P_1(P_{j-1}(a)) = = P_1(P_1(P_{j-2}(a))) = P_2(P_{j-2}(a)) = \ldots = P_{j-1}(P_1(a))$ اذا كان $a \ge 0$ عدد اولي.

تعريف (2) : لنفرض ان العدد الصحيح الضبابي $\tilde{n}$ يمكن ان يدعى بالعدد الضبابي الثلاثي (k, n, l), ، $k \le n \le l$ ، $k, n, l \in Z$ ، حيث :

$$l = \begin{cases} P_1(n), n \ge 0, \\ -P_{-1}(-n), n < 0, \end{cases} \quad k = \begin{cases} P_{-1}(n), n \ge 0, \\ -P_1(-n), n < 0, \end{cases}$$

$P_1(\cdot), P_{-1}(\cdot)$ ، العدد السابق واللاحق (الاولي) للعدد $n, n \ge 0$, و $-n$ ، $n < 0$.

بعبارة اخرى ، اي عدد صحيح ضبابي $\tilde{n}$ يمكن تمثيله على النحو الثلاثي ، اليسار (k) ، اليمين (l) وهي اقريب الاعداد الالية للعدد $\tilde{n}$. هذا الاسلوب يسمح لـ $n \in Z$ ان يكون $\tilde{n} = (k, n, l)$ ، وبالامكان وضع k و l وفقاً للصيغة اعلاه مع استخدام دالة الانتماء الخطية :

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \frac{x-k}{n-k}, x \in [k, n] \text{ ، } \mu_{\tilde{n}}(x) = \frac{l-x}{l-n}, x \in [n, l] \text{ ، } \mu_{\tilde{n}}(x) = 0, x \notin [k, l]$$

باستخدام تعريف الاعداد الصحيحة الضبابية ، العمليات الحسابية التقليدية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) لاي عددين صحيحين ضبابيين $\tilde{m}, \tilde{n}$ تعطى بصيغة الاعداد الضبابية المثلثية (k_n, n, l_n) و (k_m, m, l_m) كلاً على التوالي :

$$1.\ \tilde{n} + \tilde{m} = (k_+, n+m, l_+), \quad k_+ = \begin{cases} P_{-1}(n+m), n+m \ge 0, \\ -P_1(-n-m), n+m < 0, \end{cases} \quad l_+ = \begin{cases} P_1(n+m), n+m \ge 0, \\ -P_{-1}(-n-m), n+m < 0, \end{cases}$$

$$2.\ \tilde{n} - \tilde{m} = (k_-, n-m, l_-), \quad k_- = \begin{cases} P_{-1}(n-m), n-m \ge 0, \\ -P_1(-n+m), n-m < 0, \end{cases} \quad l_- = \begin{cases} P_1(n-m), n-m \ge 0, \\ -P_{-1}(-n+m), n-m < 0, \end{cases}$$

$$3.\ \tilde{n} * \tilde{m} = (k_*, n*m, l_*), \quad k_* = \begin{cases} P_{-1}(n*m), n*m \ge 0, \\ -P_1(-n*m), n*m < 0, \end{cases} \quad l_* = \begin{cases} P_1(n*m), n*m \ge 0, \\ -P_{-1}(-n*m), n*m < 0, \end{cases}$$

$$4.\ \tilde{n} / \tilde{m} = (k_{div}, n/m, l_{div}), \quad m \ne 0, \quad l_{div} = \begin{cases} P_1(n/m), n/m \ge 0, \\ -P_{-1}(-n/m), n/m < 0, \end{cases} \quad k_{div} = \begin{cases} P_{-1}(n/m), n/m \ge 0, \\ -P_1(-n/m), n/m < 0, \end{cases}$$

$$5.\ \tilde{n} \ \% \ \tilde{m} = (k_{\text{mod}}, n\%m, l_{\text{mod}}), \quad n \ge 0,\ m > 0,$$

$$l_{\text{mod}} = \begin{cases} P_1(n\%m), n\%m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n\%m), n\%m < 0, \end{cases} \quad k_{\text{mod}} = \begin{cases} P_{-1}(n\%m), n\%m \geq 0, \\ -P_1(-n\%m), n\%m < 0, \end{cases}$$

من الضروري لفت الانتباه إلى واحدة من التفاصيل المهمة، منها حساب الأعداد الأولية المتعلقة لاي عدد $a \geq 0$ ، في الوقت ذاته يتم حساب الاعداد الاولية $P_1(a)$ و $P_{-1}(a)$ ، ان التمثيل لاي عدد صحيح ضبابي $\tilde{k}$ يعتمد على k ويتميز بمعالم دالة الانتماء ، لذلك فأن فترة التمثيل تكون غير معلومة (قيم ضبابية) $\tilde{k}$. يمكن اعتبار الاعداد الضبابية المثلثية بدوال الانتماء كمجموعة من المثلثات $\tilde{k} = \{(k_1, k, k_2)\}$ ، $k \in Z$ ،الاعداد الاولية k_1, k_2 تحسب وفق الصيغة التالية :

$$k_1 = P_{-1}(k), k_2 = P_1(k),$$

وفقاً لدالة الانتماء اعلاه فأن لاي عدد ضبابي $\tilde{k}$ يمكن تحديد العدد الصحيح الضبابي المثلثي $\tilde{k} = \{(k_1, k, k_2)\}$ بتعيين الحدود اليمنى واليسرى الاولية الاقرب للعدد k .

حالة دراسية في مجال نقل النفط الخام Case study in the field of oil

البيانات التالية تم تبنيها من Bhumik [4] ، شركة كبرى متكاملة في مجال النفط تنتج معظم نفطها وتستورد ما تبقى لسد احتياجها ، شبكة توزيع واسعة تستخدم لنقل النفط الى شركات التكرير(المصافي) ومن ثم نقل المنتجات النفطية من المصافي الى مراكز التوزيع ، المواقع المختلفة لهذه المنشئات معطى بالجدول رقم (1)، ان الشركة في سعيها زيادة حصصها في السوق من منتجاتها الرئيسية، لذا قامت الادارة باتخاذ قرار توسيع مخرجاتها من خلال بناء مصفى اضافي مع زيادة استيرادها من النفط الخام ، القرار الحاسم يكمن في اي موقع يتم بناء المصفى الجديد.ان اضافة المصفى الجديد سيكون له التأثير الكبير على عملية منظومة التوزيع ، بما في ذلك القرارات المتعلقة كم من النفط الخام يمكن نقله من كل من المصادر الى كل من المصافي بضمنها (الجديد) وما هي كمية المنتج النهائي المنقولة من كل مصفى الى مراكز التوزيع، ولذلك فأن العوامل الرئيسية الثلاثه لقرار الادارة في اختيار موقع المصفى الجديد هي

1- كلفة نقل النفط الخام من المصادر الى كافة المصافي بضمها الجديد.
2- كلفة نقل المنتج النهائي من المصافي الى مراكز التوزيع.
3- كلف تشغيل المصفى الجديد بضمنها كلف العمل ،الضرائب،الضمان،تاثير الحوافز المالية التي تقدمها الدولة او المدينة،كذلك كلف رأس المال لانها ستكون نفسها في اي موقع متاح.بعد التحقق وجد فريق العمل المعني ان هناك ثلاث مواقع (لوس انجلوس، جالفستون،و ميزوري)، لها مميزات رئيسية مبينه بالجدول رقم (2)،والجدول رقم (3) يوضح البيانات الانتاجية الخاصة بالشركة.

الجدول رقم (1) المواقع الحالية لمنشئات الشركة

نوع المنشأة	المواقع
حقول النفط	1.تكساس/2.كاليفورنيا/3.الاسكا
مصافي التكرير	1.قرب نيو اورلاند/2.قرب ساوث كارولينا/3.قرب سياتل/واشنطن
مراكز التوزيع	1.بيتسبورغ،بنسلفانيا /2.اتالانتا،جورجيا / 3.مدينة كنساس،ميزوري 4.سان فرانسيسكو، كاليفورنيا

الجدول رقم (2) المواقع المتاحة للمصفى الجديد مع المزايا الخاصه بكل موقع

المواقع المتاحة	المزايا الرئيسية
قرب لوس انجولس ، كاليفورنيا	1.قرب حقول نفط كاليفورنيا/2.سهولة الوصول من حقول نفط الاسكا./3.الى حد ما قريب من مركز توزيع سان فرانسيسكو
قرب جالفستون	1.قرب حقول نفط تكساس/2.سهولة الوصول من النفط المستورد/3. .قريب من مقر الشركة
قرب ميزوري	1.انخفاض تكاليف التشغيل/2.موقع مركزي لمواقع التوزيع/3.سهولة الوصول للنفط الخام بواسطة نهر المسيسبي.

الجدول رقم (3) يبين بيانات الانتاج الخاصة بالشركة

المصفى	الاحتياجات السنوية للمصفى من النفط الخام (برميل/بالمليون)	حقول النفط	المنتج السنوي من النفط الخام لكل حقل نفطي (برميل/بالمليون)
1. نيو اورلاند 2. ساوث كارولينا 3. سياتل/واشنطن 4.الجديد	100 60 80 120	1.تكساس 2.كاليفورنيا 3.الاسكا	80 60 100
الاجمالي	360	الاحتياجات الكلية من المستورد 360-240=120	

يحتاج فريق العمل الى جمع كميات كبيرة من البيانات من اجل اجراء التحليلات المطلوبه عليها ، تريد الادارة ان تعمل جميع مصافي التكرير بكامل طاقتها الانتاجية لذلك فأن مهمة فريق العمل تكمن في تحديد مقدار النفط الخام الذي يحتاجه كل مصفى سنوياً، حيث ان كميات النفط الخام المنتج او المشترى ستكون هي نفسها بغض النظر عن الموقع الجديد للمصفى الذي سيتم تحديده ، استنتج فريق العمل ان تكاليف الانتاج او الشراء ليست مرتبطة بقرار اختيار الموقع الجديد باستثناء تكاليف الشحن. من ناحية اخرى فأن تكاليف نقل النفط الخام من مصادرها الى المصافي ذات اهمية كبرى، هذه الكلف مبينه في الجدول رقم (4) لكلا المصافي الثلاثة وللمقترحة ايضاً، اما الجدول رقم (5) فيبين كلف نقل النفط الخام من مصافي التكرير الى مراكز التوزيع ، وان الصف السفلي من الجدول يبين عدد وحدات المنتج النهائي التي يحتاجها كل مركز من مراكز التوزيع. اضافة الى ما تقدم ذكره فأن

الجانب الرئيسي النهائي من البيانات ينطوي على تكاليف التشغيل لكل مصفى في كل من المواقع الثلاث المزمع انشاءها فيها ،اذ ان تقدير التكاليف يتطلب زيارات ميدانية من قبل العديد من أعضاء فريق العمل لجمع معلومات مفصلة حول تكاليف اليد العاملة المحلية، والمهام،وتكليف الارض وغيرها ، وقد لخصت بالجدول رقم (6).

الجدول رقم (4) الخاص بكلف شحن النفط الخام من المصادر الى مصافي التكرير

	كلفة الشحن (بمليون الدولار / لكل مليون برميل) من الحقول الى المصافي بضمنها المواقع المقترحة					
	نبو اورلاند	كارليستون	سياتل	لوس انجلوس	جالفستون	ميزوري
تكساس	2	4	5	3	1	7
كاليفورنيا	5	5	3	1	3	4
الاسكا	5	7	3	4	5	7
المستورد	2	3	5	4	3	4

الجدول رقم (5) كلف الشحن من المصافي الى مراكز التوزيع

		كلف الشحن لكل وحدة واحدة (بمليون دولار/لكل مليون برميل) من المصافي الى مراكز التوزيع			
		بيتسبورغ	اتالانتا	كنساس	سان فرانسيسكو
مصافي التكرير	نيو اورلاند	6.5	5.5	6	8
	جارليستون	7	5	4	7
	سياتل	7	8	4	3
مصافي التكرير المقترحة	لوس انجلوس	8	6	3	2
	جالفستون	5	4	3	6
	ميزوري	4	3	1	5
الاحتياجات		100	80	80	100

الجدول رقم (6) تكاليف تشغيل المصافي

الموقع	كلف التشغيل السنوية (بمليون الدولار)
لوس انجلوس	620
جالفستون	570
ميزوري	530

<u>بناء (صياغة) النموذج الرياضي للمشكلة:</u>

قبل البدء بصياغة النموذج الرياضي للمشكلة اعلاه يتطلب منا تقديم مفهوم عام عن قيود (Either-Or) والتي تمتلك الصيغة العام (K out of N) اي ان كان لدينا N من القيود ونرغب بتفعيل عدد منا وليكن K فأننا نلجأ الى هذا النوع من الخوارزمية التي يمكن التعبير عنها بالاتي [5] :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i - My_i for\ all\ i = \overline{1,m}$$

Vol: 13 No:1 , January 2017
DOI : http://dx.doi.org/10.24237/djps.1301.167A
P-ISSN: 2222-8373
E-ISSN: 2518-9255

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = N - K$$

حيث $y_i \in \{0,1\}$, M>>0 ، اذ ان الشرط الثاني المتعلق بالمتغير y_i يضمن ان K من قيود المشكلة الاصلية سوف تبقى على حالة دون تغيير وما تبقى من القيود سوف يحذف.

تعريف متغيرات القرار

$x_{ijk} =$ الكميات المنقولة من النفط الخام من الحقل i الى المصفى j ، والكميات المنقولة من المصفى j الى مراكز التوزيع k (سنوياً) ،

$C_{ijk} =$ كلف الشحن من الحقل i الى المصفى j ، والكميات المنقولة من المصفى j الى مراكز التوزيع k .

$\delta_{ijk} =$ متغير ثنائي $F_j, =$ كلف التشغيل للمصافي المقترحة

حيث :

$$i = 1,2,3,4 , \qquad j = 1,2,3, A \; OR \; B \; OR \; C , \qquad k = 1,2,3,4$$

دالة الهدف

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} c_{ijk}x_{ijk} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j\in\{A,B,C\}}\sum_{k=1}^{4} c_{ijk}\delta_{ijk}x_{ijk} + F_j\delta_j$$

$$\delta_{ijk=} \begin{cases} 1 \;\exists \quad x_{ijk} > 0 , j \in \{A,B,C\} , i = \overline{1,m} , k = \overline{1,p} \\ 0 \text{ otherwise} , \nexists \; (x_{iAk} > 0 , x_{iBk} > 0 , x_{iCk} > 0), \end{cases}$$

$$j \in \{A,B,C\} , i = \overline{1,m} , k = \overline{1,p}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1 \quad \exists\ \delta_{ijk=} 1 \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

القيود الخاصة بحقول النفط الخام والمستورد

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{1jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{1Ak} + My_1 \geq 80 \quad , \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{2jk} + \sum_{ik=1}^{4} x_{2Ak} + My_1 \geq 60$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{1jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{1Bk} + My_2 \geq 80 \quad , \quad \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{2jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{2Bk} + My_2 \geq 60$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{1jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{1Ck} + My_3 \geq 80 \quad , \quad \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{2jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{2Ck} + My_3 \geq 60$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{3jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{3Ak} + My_1 \geq 100 \quad , \quad \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{4jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{4Ak} + My_1 \geq 120$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{4jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{4Bk} + My_2 \geq 120 , \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{3jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{3Bk} + My_2 \geq 100 ,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{3jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{3Ck} + My_3 \geq 100 , \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_{4jk} + \sum_{k=1}^{4} x_{4Ck} + My_3 \geq 120$$

القيود الخاصة بسعة مصافي التكرير

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_{i1k} = 100 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_{i2k} = 60 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_{i3k} = 80,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_{iAk} + My_1 \geq 120 \quad , \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_{iBk} + My_2 \geq 120 , \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} x_{iCk} + My_3 \geq 120$$

القيود الخاصة بمراكز التوزيع

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij1} + \sum_{i=1}^{4} x_{iA1} - My_1 \leq 100, \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij2} + \sum_{i=1}^{4} x_{iA2} - My_1 \leq 80$$

P-ISSN: 2222-8373
E-ISSN: 2518-9255

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij1} + \sum_{i=1}^{4} x_{iB1} - My_2 \le 100\,,\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij2} + \sum_{i=1}^{4} x_{iB2} - My_2 \le 80$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij1} + \sum_{i=1}^{4} x_{iC1} - My_3 \le 100, \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij2} + \sum_{i=1}^{4} x_{iC2} - My_3 \le 80$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij3} + \sum_{i=1}^{4} x_{iA3} - My_1 \le 80\,, \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij3} + \sum_{i=1}^{4} x_{iA3} - My_1 \le 100$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij3} + \sum_{i=1}^{4} x_{iB3} - My_2 \le 100\,, \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij4} + \sum_{i=1}^{4} x_{iB4} - My_2 \le 80$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij3} + \sum_{i=1}^{4} x_{iC3} - My_3 \le 100, \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} x_{ij4} + \sum_{i=1}^{4} x_{iC4} - My_3 \le 80$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2, x_{ijk} \ge 0\,, y_i \in \{0,1\}\,, i = 1,2,3 \quad M \gg 0$$

بأستخدام برنامج الحاسوب الجاهز WINQSB ، تم الحصول على نتائج الحل الامثل (بوحدة قياس مليون برميل / سنوياً) وعلى النحو التالي :

$$x_{111} = 35\,, x_{1c2} = 25, x_{234} = 60\,, x_{323} = 5\,, x_{1C3} = 75\,\,, x_{334} = 20\,, x_{3c4} = 20\,, x_{411} = 65, x_{422} = 55$$

الكلفة الكلية السنوية = 2707 مليون دولار / سنوياً ، وقد تم اختيار الموقع c **(ميزوري) لانشاء مصفى التكريرالجديد** المزمع دخوله ضمن خطة توسيع عمل الشركة.

تفسير الحل ما بعد الامثلية

عندما يكون سعر الظل لاحدى قيود سعة مصافي التكرير هو 8.5 ، هذا يعني عند تقليل قيمة هذا المورد المتمثل بسعة مصفى التكرير الاول، وحدة واحدة من 100 الى 99 ، فأن دالة الهدف ستتحسن (تقل) بمقدار 8.5 مليون دولار، ومن جهة اخرى لو اخذنا قيداً والذي يمتلك سعر ظل(3-) يعني في حال تقليل قيمة هذا المورد المتمثل بسعة مصفى التكرير الثاني، وحدة واحدة من 100 الى 99 ، فأن دالة الهدف سوء تسوء تزيد بمقدار 3 مليون دولار .

الاستنتاجات

لقد قمنا في هذا البحث استعراض بعض المفاهيم المتعلقة بتحليل الحساسية الذي يسمى احياناً تحليل ما فوق الامثلية post optimality ، وهذا النوع من التحليلات تستخدمة الادارات للاجابة عن سلسلة من اسئلة ذات صيغة ((ماذا يحدث اذا)) عن القيم الداخلة في نموذج البرمجة الخطية ، كما ان هذا النوع من التحليلات يختبر الكيفية التي يتغير بها الحل الامثل من حيث الربح وقيم الطرف الايمن من القيود،كذلك استفدنا من مفهوم الاعداد الاولية في حل نموذج البرمجة الخطية المضبب.

المصادر

1. حلمي عبد الفتاح البشبيشي،طه الطاهر ابراهيم اسماعيل،دلال صادق بطرس، "بحوث العمليات في المحاسبة"،مركز الكومبيوتر/كلية الصيدلة/جامعة القاهرة،1993.
2. George B. Dantzig, Mukund N. Thapa," Linear Programming" ,springer,1997.
3. Paul A.Jensen & Jonthan F.Bard," Operations Research models and methods",John Willy & Sons,Inc.2003.
4. Bhumik,http://www.casestudy.com.in/a-case study in many transportation problems Highered. McGraw-hill com. ch08_suppleme.qsd 5/12/2004 .
5. Prem Kumar Gupta, .S.Hira,". Operations Research" , S.chand and company LTD , 2000. P 585-586.
6. James K.HO, Computing True Shadow Prices in Linear programming, informatics, vol.11No.4, 421-434, 2000.
7. Jan Stallaert, Post-Optimality Analysis of the optimal Solution of a Degenerate Linear program Using a Pivoting Algorithm, OPIM Department, Unit 1041, Storrs, CT 06269,2005.
8. Ivokhin E.V., Almodars Barraq Subhi Kaml,on approach for the solving of the linear programming problem with fuzzy constraints, вісник, Mathematics - physics Sciences No.1,2013
9. Almodars Barraq Subhi Kaml,Improve the methods and algorithms of fuzzy linear programming problems with limited resources, Doctorate dissertation, National University of
Kyiv,Kyiv2015.