Comparison among known and suggestion for the scale parameter and reliability of Rayleigh distribution with two parameters

Dr. Awatif Rezzoky Mezaal
College of Education
Al- Mustansriay University

Abstract

The Rayleigh distribution has been widely used especially in the modeling of the life time event data. It provides a statistical model which has a wide variety of application in many areas and such as accurate analysis and failure forecasts and reliability estimate. In this research we explore and compare the performance of many estimators for the parameters and for reliability function approach used are Maximum Likelihood Maximum Likelihood Estimators, Moment Estimators, Bayes Estimators, Semi-Minimax Estimators.

Simulation experiments are performed to compare between estimators using MSE, and all the results are explained by table.

Key word: Rayleigh distribution, Maximum Likelihood Estimators, Bayes Estimators, Semi-Minimax Estimators.

استخدام المحاكاة في المقارنة بين مقدرات معلومة ومقترحة لمعلمة القياس ومعولية توزيع رالي ذي المعلمتين

أ.م.د. عواطف رزوقي مزعل
كلية التربية/ الجامعة المستنصرية

Comparison among known and suggestion for the scale parameter and reliability of Rayleigh distribution with two parameters

Dr. Awatif Rezzoky Mezaal

الخلاصة

يتضمن هذا البحث ايجاد المقدر Semi-Minimax للمعلمة θ لتوزيع رايلي عند نوعين من دوال الخسارة هما Quadratic وكذلك Modified Linear Exponential من خلال تطبيق نظرية Lehmann (1950)، وتقدير دالة المعولية، وتعتمد تجارب المحاكاة في المقارنة بين طرائق التقدير.

الكلمات المفتاحية: توزيع رايلي, مقدر الامكان الاعظم, مقدر بيز , مقدرSemi-Minimax.

هدف البحث

يهدف البحث الى المقارنة بين ثلاثة مقدرات لمعلمة القياس لتوزيع رالي ذي المعلمتين (α, θ) باعتبار α معلمة الازاحة، θ معلمة القياس، والمقدرات هي الامكان الاعظم، مقدر بيز، والمقدر Minimax، وبعد اشتقاق صيغ التقدير، تطبق المحاكاة، لاجراء المقارنات من خلال توليد بيانات لعينات ذات حجوم (n=20, 25, 40, 50, 100) وتكرار كل تجربة (L=500)، والمقارنة بواسطة المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي Mean Square Error (MSE).

المقدمة

تطرق كثير من الباحثين الى مناقشة خصائص وطرائق تقدير التوزيعات (Burr type X) و (Burr type XII) نذكر على سبيل المثال Saleem, Aslam (2008)، وكذلك Jaheen (1995, 1996)، Surles and Padjett (1998)، والباحث Ragab (2006)، وقد ادخل الباحث Wang (2005) توزيع (Burr type II) بمعلمتين، والذي اطلق عليه توزيع رايلي العام Generalized Rayleigh Distribution، والذي يستخدم بدرجة كبيرة في نمذجة بيانات القوة والاجهاد، وكذلك نمذجة اوقات الحياة لحين حصول الفشل لكثير من الظواهر. وسوف نتطرق في بحثنا هذا الى تعريف التوزيع وشرح كيفية تقدير معلمة القياس θ، ودالة المعولية باعتبار ان معلمة الازاحة α معلومة، ومن المقدرات الامكان الاعظم، ومقدر بيز، ومقدر Minimax. وتتم المقارنة بين المقدرات من خلال تجارب محاكاة لحجوم عينات مختلفة، وقيم معلمات مختلفة وتكرار كل تجربة R=500 لكي تكون النتائج ذات قيمة واهمية.

الجانب النظري

يعتبر توزيع رايلي من التوزيعات الاحتمالية المهمة في تحليل اوقات البقاء لكثير من الظواهر، وقد بحث الكثير من الباحثين طرائق تقدير معلماته، وخاصة معلمة لقياس θ باستخدام طرائق متعددة منها الامكان الاعظم، مقدرات بيز، ومقدرات Minimax التي تعتمد على تصغير الخسارة المتوقعة، ومما يميز مقدر Minimax للمعلمة θ هو انه يعتبر المعلمة متغير عشوائي مقارنة بالمقدرات الكلاسيكية التي تعتبر المقدرات ثابتة، وسوف يتم في هذا البحث اشتقاق المقدر Minimax للمعلمة θ تحت افتراض دالة خسارة تربيعية.

تعرف الدالة الاحتمالية لتوزيع رالي ذي المعلمتين، باعتبار α معلمة الازاحة، θ معلمة القياس، بالدالة الاحتمالية التالية:

$$f(t;\alpha,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(t-\alpha)}{\theta}\,e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\theta}} & \alpha<t<\infty;\ \theta>0\\ 0 & o/w\end{cases} \qquad .....(1)$$

اما الدالة الاحتمالية التراكمية c.d.f فهي:

$$F(t,\alpha,\theta)=1-e^{-(t-\alpha)^2/\theta} \qquad t\geq\alpha \qquad .....(2)$$

اما دالة المعولية للتوزيع فهي:

$$R(t)=1-F(t)=e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\theta}} \qquad \alpha<t<\theta\ ;\ \theta>0 \qquad .....(3)$$

ويمثل توزيع رالي حالة خاصة من توزيع ويبل وله تطبيقات واسعة في اختبارات الحياة، كما اشار الى ذلك الباحث Palovko[4]، وكذلك في التجارب الطبية المتعلقة ببحوث السرطان كما اشار الى ذلك Dyer and Whisenand [2]، وكذلك اشار الباحثان Alkutubi and Ibrahim الى اهمية هذا التوزيع في التطبيقات الهندسية وما له صلة بمعولية المكائن.

وفيما يلي شرح لطرائق تقدير معلمة القياس θ باعتبار ان معلمة الازاحة α معلومة.

اولاً: طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Method (M.L.M)

يعتبر مقدر الامكان الاعظم من المقدرات التي تتمتع بخصائص مهمة منها الكفاية والكفاءة والاشتقاق وخاصية الثبات، وهو المقدر الذي يجعل لوغارتم دالة الامكان الاعظم في نهايتها العظمى.

فاذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, ..., t_n)$ من التوزيع المعرف بالمعادلة (1)، فان دالة الامكان الاعظم هي:

$$L(t_1, t_2,..., t_n;\alpha,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\alpha,\theta)$$

$$= 2^n \theta^{-n} \prod_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i-\alpha)^2}{\theta}} \quad .....(4)$$

وبادخال اللوغاريتم على طرفي المعادلة (3) نحصل على:

$$LnL = nLn(2) - nLn(\theta) + \sum_{i=1}^{n} Ln(t_i - \alpha) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i-\alpha)^2}{\theta} \quad .....(5)$$

ثم نشتق المعادلة (5) بالنسبة الى θ لنحصل على:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i-\alpha)^2}{\theta^2} \quad .....(6)$$

ثم نساوي المشتقة مع الصفر:

$$\frac{-n}{\hat{\theta}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i-\alpha)^2}{\hat{\theta}^2} = 0 \quad .....(7)$$

ليكون مقدر الامكان الاعظم $\hat{\theta}_{ML}$ هو:

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i-\alpha)^2}{n} \quad .....(8)$$

حيث ان معلمة الازاحة α معلومة.

وطبقاً لخاصية الثبات Invariant property التي تتميز بها مقدرات الامكان الاعظم، فان مقدر الامكان الاعظم لدالة المعولية سيكون:

$$\hat{R}_{ML}(t)= e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\hat{\theta}_{ML}}} \qquad \text{.....(9)}$$

ثانياً: مقدر Minimax مقدر بيز الموسع لمعلمة القياس θ دالة خسارة تربيعية:

اذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, ..., t_n)$ من توزيع رايلي المعرف بالمعادلة (1)، بمعلمة ازاحة α ومعلمة قياس θ، وبافتراض ان θ متغير عشوائي له توزيع سابق prior distribution:

$$g(\theta)=k\frac{\sqrt{n}}{\theta} \qquad \text{.....(10)}$$

فان التوزيع اللاحق سيكون:

$$g(\theta \backslash t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\theta}} \quad \theta>0 \qquad \text{.....(11)}$$

ان المقدر Minimax للمعلمة θ تحت افتراض دالة خسارة تربيعية Quadratic loss function هو:

$$L(\theta, d_1)=\left(\frac{\theta-d_1}{\theta}\right)^2 \qquad \text{.....(12)}$$

وطالما ان دالة المخاطرة Risk Function للمقدر $\hat{\theta}_{Minimax}$ هي:

$$Risk(\theta) = E\left[L(\theta, \hat{\theta}_{Minimax})\right]$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\theta - d_1}{\theta}\right)^2 g(\theta \backslash t)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\theta^2 - 2\theta d_1 + d_1^2}{\theta^2}\right) g(\theta \backslash t)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} g(\theta \backslash t)\, d\theta - 2d_1 \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} g(\theta \backslash t)\, d\theta + d_1^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta_1^2} g(\theta \backslash t)\, d\theta \quad \text{.....(13)}$$

$$Risk(\theta) = 1 - 2d_1 E\left(\frac{1}{\theta}\right) + d_1^2 E\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right) \quad \text{.....(14)}$$

$$\frac{\partial Risk(\theta)}{\partial d_1} = -2E\left(\frac{1}{\theta}\right) + 2d_1 E\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right) = 0$$

$$\therefore d_1^* = \frac{E\left(\frac{1}{\theta}\right)}{E\left(\frac{1}{\theta_1^2}\right)} \quad \text{.....(15)}$$

وبالنسبة لهذه التوقعات، فانها تساوي:

$$E\left(\frac{1}{\theta}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} g(\theta \backslash t)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} \times \frac{T^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)} e^{-\frac{T}{\theta}}\, d\theta$$

وبافتراض ان:

$$Z = \frac{T}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{T}{Z}$$

$$d\theta = -\frac{T}{Z^2} dZ$$

وبعد تطبيق هذا التحويل واجراء التكامل، نجد ان:

$$E(\frac{1}{\theta}) = \frac{\Gamma(n+1)}{T\,\Gamma(n)} \qquad \ldots..(16)$$

وكذلك نستخرج $E(\frac{1}{\theta^2})$ ، حيث ان:

$$E(\frac{1}{\theta^2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2} g(\theta \backslash t)\, d\theta$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2} \times \frac{T^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)} e^{-\frac{T}{\theta}}\, d\theta \qquad \ldots..(17)$$

وبافتراض ان:

$$Z = \frac{T}{\theta} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{T}{Z}$$

$$d\theta = -\frac{T}{Z^2} dZ$$

نجد ان:

$$E(\frac{1}{\theta^2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2} \times \frac{T^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)} e^{-Z} (\frac{T}{Z^2}) dZ$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{T^3} \int_0^\infty \left(\frac{T}{\theta}\right)^{n+3} e^{-Z} (\frac{T}{Z^2}) dZ$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{T^2} \int_0^\infty Z^{n+1} e^{-Z}\, dZ$$

$$E(\frac{1}{\theta^2}) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)\; T^2} \qquad \ldots..(18)$$

وعليه فان مقدر Minimax لمعلمة القياس θ لتوزيع رالي هو:

$$d_1^* = \frac{E(\frac{1}{\theta})}{E(\frac{1}{\theta_1^2})} = \frac{\frac{\Gamma(n+1)}{T\,\Gamma(n)}}{\frac{\Gamma(n+2)}{T^2\,\Gamma(n)}}$$

$$d_1^* = \frac{T\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{T\,n!}{(n+1)!} = \frac{T\,n!}{(n+1)n!}$$

$$\therefore d_1^* = \hat{\theta}_{QL} = \frac{T}{(n+1)} \qquad \text{.....(19)}$$

علماً بان $T = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2$.

وطبقاً لهذا المقدر المقترح يكون مقدر دالة المعولية لتوزيع رايلي هو:

$$R_{\hat{\theta}_{QL}}(t) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2 + (t - \alpha)^2} \right]^n \qquad \text{.....(20)}$$

ثالثاً: مقدر Minimax للمعلمة θ تحت دالة خسارة اسية خطية معدلة

Modified Linear Exponential (MLINEX) Loss Function

اذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, ..., t_n)$ من التوزيع المعرف بالمعادلة (1)، واذا اعتبرنا ان المعلومات الاولية عن θ هي:

$$g(\theta) = k\frac{\sqrt{n}}{\theta}$$

فان التوزيع اللاحق سيكون:

$$g(\theta \setminus t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2\right]^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2}{\theta}} \qquad \text{.....(21)}$$

ان مقدر بيز للمعلمة θ المعتمد على معلومات جيفري الموسعة هو:

$$g(\theta)=k\frac{n^c}{\theta^{2c}} \qquad .....(22)$$

فان التوزيع اللاحق هو:

$$h(\theta \setminus t)=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^{n+2c-1}}{\theta^{n+2c}\Gamma(n+2c-1)}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\theta}} \qquad .....(23)$$

ان المقدر Minimax للمعلمة θ والذي سنرمز له $\hat{\theta}_{BML}$ تحت افتراض دالة خسارة اسية خطية معدلة Modified Linear Exponential (MLINEX) هو:

$$L(\theta,\ d_2)=w\left[\left(\frac{d_2}{\theta}\right)^c-c\,Ln\left(\frac{d_2}{\theta}\right)-1\right] \qquad .....(24)$$

d_2 هو مقدر θ و w، c ثوابت معلومة.

وطالما ان دالة المخاطرة Risk Function للمقدر $\hat{\theta}_{Minimax}$ هي:

$$Risk(\theta)=E\left[L(\theta,\hat{\theta}_{BML})\right]$$

$$=wE\left[\left(\frac{\hat{\theta}_{BML}}{\theta}\right)^c-c\,Ln\left(\frac{\hat{\theta}_{BML}}{\theta}\right)-1\right]$$

$$=w\left[\frac{1}{\theta^C}E\left(\hat{\theta}^C_{BML}\right)-c\,E\left(Ln\left(\hat{\theta}^C_{BML}\right)\right)+c\,Ln(\theta)-1\right]$$

ان مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة MLINEX هو:

$$\hat{\theta}_{BML}=\left[E\left(\theta^{-C}\right)\right]^{-\frac{1}{C}} \qquad .....(25)$$

حيث ان:

$$E(\theta^{-C}) = \int_0^{\infty} \theta^{-C}\, g(\theta \backslash t)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \theta^{-C} \times \frac{T^n}{\theta^{n+1}\Gamma(n)}\, e^{-\frac{T}{\theta}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{T^n}{\theta^{n+c+1}}\, e^{-\frac{T}{\theta}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)T^{c+1}} \int_0^{\infty} \left(\frac{T}{\theta}\right)^{n+c+1} e^{-\frac{T}{\theta}}\, d\theta$$

وبافتراض ان:

$$y = \frac{T}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{T}{y}$$

$$d\theta = -\frac{T}{y^2} dy$$

وبعد تطبيق هذا التحويل واجراء التكامل، نجد ان:

$$E(\theta^{-C}) = \frac{1}{\Gamma(n)T^{c+1}} \int_0^{\infty} y^{n+c+1}\, e^{-y} \left(\frac{T}{y^2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)T^{c}} \int_0^{\infty} y^{n+c-1}\, e^{-y}\, dy$$

$$E(\theta^{-C}) = \frac{1}{\Gamma(n)T^{c}}\, \Gamma(n+c)$$

$$= \frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n)} T^{-c} \qquad \text{.....(26)}$$

وبالتالي فان مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة MLINEX هو:

$$\hat{\theta}_{BML} = \left[E(\theta^{-C})\right]^{-\frac{1}{C}}$$

$$= \left(\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n)} T^{-c} \right)^{-\frac{1}{C}}$$

$$\therefore \hat{\theta}_{BML} = T \left(\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n)} \right)^{\frac{-1}{C}} \quad \text{.....(27)}$$

حيث ان $T = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2$.

وطبقاً لهذا المقدر المقترح يكون مقدر دالة المعولية لتوزيع رايلي هو:

$$R_{\hat{\theta}_{BML}}(t) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2 + (t - \alpha)^2} \right]^{n+2c-1} \quad \text{.....(28)}$$

الجانب التجريبي

لغرض المقارنة بين المقدرات الثلاث لمعلمة القياس θ اعتمدت المحاكاة، حيث تم توليد البيانات من التوزيع المنتظم وتحويلها الى بيانات تتبع توزيع رايلي ذي المعلمتين وباستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل العكسية التالية:

$$F(t,\alpha,\theta) = 1 - e^{-(t-\alpha)^2/\theta}$$

$$U = 1 - e^{-(t-\alpha)^2/\theta}$$

$$e^{-(t-\alpha)^2/\theta} = 1 - U$$

وبعد اجراء بعض التبسيطات، نحصل على:

$$\frac{-(t-\alpha)^2}{\theta} = Ln(1-U)$$

$$(t-\alpha)^2 = -\theta\, Ln(1-U)$$

$$\therefore\ t = \alpha + \sqrt{-\theta\, Ln(1-U)} \qquad \text{.....(29)}$$

وتستخدم المعادلة (29) في توليد البيانات لحجوم عينات مختلفة وقيم مفترضة للمعلمة ($\alpha = 0.5,1,1.5$) والمعلمة ($\theta = 0.5,1,1.5$). وتستخرج المقدرات للمعلمة θ من تطبيق المعادلات 8، 19، 27، ويعتمد المقياس متوسط مربعات الخطأ Mean Squared Error (MSE) للحصول على المقدر الذي يمتلك اصغر MSE، ومن ثم تعتمد هذه المعلمة في تقدير دالة المعولية. ولتنفيذ تجارب المحاكاة على قيم t_i المولدة من المعادلة (29)، وقد اخذت خمسة حجوم للعينات هي (n=20, 25, 40, 50, 100) وكررت كل تجربة (L=500). واعطيت قيمة افتراضية لكل من (α, θ, c) (c ثابت جيفري)، والجداول التالية تلخص نتائج المحاكاة للطرق الثلاثة.

جدول (1): تقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ و متوسط مربعات الخطأ التكاملي وتقديرات المعولية عند حجم العينة (n=10)

c	θ	α	$\hat{\theta}_{QL}$	$MSE(\hat{\theta}_{QL})$	$R_{\hat{\theta}_{QL}}(t)$	$\hat{\theta}_{BML}$	$MSE(\hat{\theta}_{BML})$	$R_{\hat{\theta}_{BML}}(t)$
-2	0.5	0.5	0.192996	0.009793	0.815147	0.235884	0.007526	0.866244
		1	0.200542	0.009354	0.649802	0.245107	0.007075	0.737878
		1.5	0.195189	0.009681	0.077740	0.238565	0.007418	0.159389
	1	0.5	0.390245	0.038793	0.902207	0.476966	0.029765	0.930365
		1	0.399346	0.037753	0.801055	0.488090	0.028707	0.855692
		1.5	0.394083	0.038317	0.244095	0.481656	0.029263	0.365240
	1.5	0.5	0.603471	0.084077	0.935389	0.737575	0.063656	0.954261
		1	0.597675	0.085057	0.861316	0.730491	0.064648	0.900533
		1.5	0.597924	0.084982	0.378375	0.730795	0.064558	0.501684
-1	0.5	0.5	0.195234	0.009701	0.816918	0.253094	0.006790	0.903331
		1	0.199601	0.009425	0.648108	0.258755	0.006494	0.802953
		1.5	0.195953	0.009622	0.078530	0.254027	0.006685	0.263923
	1	0.5	0.401314	0.037323	0.905940	0.520248	0.025505	0.951678
		1	0.386487	0.038962	0.796453	0.501028	0.027120	0.891791
		1.5	0.387895	0.038793	0.240302	0.502853	0.026943	0.480434
	1.5	0.5	0.598842	0.084766	0.935559	0.776316	0.058351	0.967183
		1	0.601994	0.084235	0.862430	0.780403	0.057821	0.928384
		1.5	0.596745	0.085516	0.376045	0.773597	0.059368	0.605002
1	0.5	0.5	0.202114	0.009318	0.821250	0.222325	0.008248	0.805445
		1	0.200376	0.009343	0.651954	0.220414	0.008259	0.625199
		1.5	0.196538	0.009659	0.079555	0.216191	0.008599	0.063366
	1	0.5	0.386702	0.039052	0.902201	0.425373	0.034760	0.893023
		1	0.400067	0.037644	0.800551	0.440074	0.033350	0.783210
		1.5	0.386667	0.039017	0.238844	0.425333	0.034717	0.208787
		0.5	0.600469	0.084072	0.936297	0.660516	0.074292	0.930176

	1.5	1	0.593799	0.085519	0.860451	0.653178	0.075823	0.847744
		1.5	0.588239	0.086703	0.372745	0.647062	0.077072	0.339383
2	0.5	0.5	0.198703	0.009450	0.820456	0.208401	0.008912	0.773814
		1	0.195849	0.009665	0.641792	0.205408	0.009134	0.564202
		1.5	0.198844	0.009492	0.080855	0.208549	0.008960	0.041294
	1	0.5	0.406070	0.037015	0.905918	0.425889	0.034874	0.879664
		1	0.393098	0.038327	0.799459	0.412284	0.036184	0.748299
		1.5	0.399210	0.037819	0.247441	0.418696	0.035688	0.167963
	1.5	0.5	0.586166	0.086906	0.934037	0.614776	0.082099	0.915204
		1	0.587142	0.086892	0.858130	0.615801	0.082098	0.820119
		1.5	0.582980	0.087646	0.369526	0.611434	0.082863	0.279118

جدول (2): تقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ و متوسط مربعات الخطأ التكاملي وتقديرات المعولية عند حجم العينة (n=25)

c	θ	α	$\hat{\theta}_{QL}$	$MSE(\hat{\theta}_{QL})$	$R_{\hat{\theta}_{QL}}(t)$	$\hat{\theta}_{BML}$	$MSE(\hat{\theta}_{BML})$	$R_{\hat{\theta}_{BML}}(t)$
-2	0.5	0.5	0.210145	0.003438	0.827085	0.227657	0.003058	0.846068
		1	0.211310	0.003414	0.656556	0.228919	0.003034	0.690257
		1.5	0.208159	0.003477	0.063502	0.225506	0.003096	0.087213
	1	0.5	0.414654	0.014000	0.907914	0.449208	0.012481	0.918478
		1	0.417184	0.013872	0.807397	0.451949	0.012348	0.828315
		1.5	0.416545	0.013872	0.234888	0.451257	0.012344	0.278440
	1.5	0.5	0.634874	0.030562	0.939145	0.687780	0.027121	0.946240
		1	0.632012	0.030729	0.868016	0.684680	0.027286	0.882846
		1.5	0.615335	0.031845	0.368837	0.666613	0.028414	0.414950
	0.5	0.5	0.208961	0.003458	0.826775	0.231243	0.002975	0.858729
		1	0.209248	0.003450	0.655215	0.231560	0.002967	0.712632
		1.5	0.208393	0.003469	0.063703	0.230615	0.002986	0.108294

-1	1	0.5	0.420011	0.013722	0.909529	0.464798	0.011783	0.926916
		1	0.415520	0.013948	0.806425	0.459829	0.012018	0.841748
		1.5	0.412123	0.014107	0.231044	0.456069	0.012181	0.307669
	1.5	0.5	0.623338	0.031309	0.938087	0.689807	0.026952	0.950143
		1	0.632386	0.030840	0.867332	0.699820	0.026505	0.892308
		1.5	0.625981	0.031156	0.374485	0.692732	0.026801	0.454477
1	0.5	0.5	0.210647	0.003425	0.827511	0.219073	0.003239	0.821298
		1	0.211465	0.003401	0.657912	0.219924	0.003214	0.647082
		1.5	0.208701	0.003460	0.063894	0.217049	0.003274	0.057516
	1	0.5	0.416036	0.013913	0.908594	0.432677	0.013169	0.905124
		1	0.414667	0.013967	0.806574	0.431253	0.013223	0.799699
		1.5	0.414350	0.013989	0.232999	0.430924	0.013245	0.220155
	1.5	0.5	0.622404	0.031472	0.937692	0.647301	0.029803	0.935285
		1	0.626016	0.031088	0.867275	0.651057	0.029406	0.862363
		1.5	0.617613	0.031764	0.369263	0.642318	0.030095	0.355134
2	0.5	0.5	0.212762	0.003377	0.829481	0.216975	0.003284	0.811159
		1	0.207450	0.003491	0.652924	0.211558	0.003398	0.620656
		1.5	0.211398	0.003407	0.066012	0.215585	0.003314	0.048449
	1	0.5	0.415743	0.013947	0.908331	0.423976	0.013577	0.897937
		1	0.419166	0.013791	0.807688	0.427467	0.013420	0.787360
		1.5	0.414840	0.013971	0.233328	0.423056	0.013600	0.196949
	1.5	0.5	0.620370	0.031548	0.937715	0.632655	0.030713	0.930517
		1	0.625263	0.031240	0.866653	0.637645	0.030404	0.851942
		1.5	0.641238	0.030146	0.382838	0.653937	0.029306	0.341977

جدول (3): تقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ و متوسط مربعات الخطأ التكاملي وتقديرات المعولية عند حجم العينة (n=40)

c	θ	α	$\hat{\theta}_{QL}$	$MSE(\hat{\theta}_{QL})$	$R_{\hat{\theta}_{QL}}(t)$	$\hat{\theta}_{BML}$	$MSE(\hat{\theta}_{BML})$	$R_{\hat{\theta}_{BML}}(t)$
-2	0.5	0.5	0.211227	0.002114	0.827964	0.222059	0.001964	0.839743
		1	0.212127	0.002097	0.657704	0.223005	0.001946	0.678610
		1.5	0.209886	0.002132	0.058356	0.220649	0.001981	0.071772
	1	0.5	0.428709	0.008281	0.911026	0.450694	0.007678	0.917408
		1	0.425223	0.008357	0.810551	0.447029	0.007753	0.823393
		1.5	0.426744	0.008319	0.235639	0.448629	0.007714	0.262200
	1.5	0.5	0.638306	0.018826	0.939318	0.671039	0.017470	0.943736
		1	0.630581	0.019137	0.867564	0.662919	0.017783	0.876843
		1.5	0.635614	0.018942	0.374184	0.668210	0.017588	0.402461
-1	0.5	0.5	0.209138	0.002143	0.826598	0.222737	0.001953	0.846467
		1	0.211747	0.002104	0.656733	0.225516	0.001914	0.692006
		1.5	0.213354	0.002085	0.061019	0.227227	0.001895	0.085675
	1	0.5	0.415776	0.008653	0.908293	0.442812	0.007897	0.919267
		1	0.424468	0.008392	0.809838	0.452068	0.007632	0.831422
		1.5	0.423903	0.008412	0.233204	0.451467	0.007653	0.278938
	1.5	0.5	0.636149	0.018900	0.939142	0.677514	0.017189	0.946537
		1	0.642026	0.018628	0.869959	0.683773	0.016911	0.885220
		1.5	0.635236	0.018920	0.374674	0.676543	0.017206	0.423104
1	0.5	0.5	0.209416	0.002140	0.826531	0.214651	0.002066	0.822614
		1	0.210800	0.002118	0.655503	0.216070	0.002044	0.648654
		1.5	0.211188	0.002111	0.059153	0.216467	0.002037	0.055230
	1	0.5	0.420276	0.008511	0.909423	0.430783	0.008215	0.907270
		1	0.425590	0.008357	0.810387	0.436230	0.008060	0.806149
		1.5	0.425537	0.008356	0.234625	0.436175	0.008058	0.226409
		0.5	0.633224	0.019020	0.938874	0.649054	0.018352	0.937396

	1.5	1	0.638507	0.018825	0.868752	0.654469	0.018158	0.865708
		1.5	0.637649	0.018818	0.376011	0.653590	0.018149	0.367025
2	0.5	0.5	0.210203	0.002128	0.827236	0.212814	0.002091	0.815585
		1	0.212405	0.002096	0.657320	0.215044	0.002059	0.637075
		1.5	0.211685	0.002105	0.059597	0.214315	0.002068	0.048559
	1	0.5	0.422484	0.008450	0.909780	0.427732	0.008302	0.903361
		1	0.425434	0.008377	0.809838	0.430719	0.008229	0.797167
		1.5	0.424644	0.008381	0.233922	0.429919	0.008233	0.210165
	1.5	0.5	0.636345	0.018897	0.939143	0.644251	0.018564	0.934734
		1	0.639174	0.018779	0.868956	0.647114	0.018445	0.859869
		1.5	0.631486	0.019120	0.371846	0.639331	0.018787	0.345603

جدول (4): تقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ و متوسط مربعات الخطأ التكاملي وتقديرات المعولية عند حجم العينة (n=50)

c	θ	α	$\hat{\theta}_{QL}$	$MSE(\hat{\theta}_{QL})$	$R_{\hat{\theta}_{QL}}(t)$	$\hat{\theta}_{BML}$	$MSE(\hat{\theta}_{BML})$	$R_{\hat{\theta}_{BML}}(t)$
-2	0.5	0.5	0.210974	0.001688	0.827965	0.219585	0.001591	0.837379
		1	0.214812	0.001645	0.659964	0.223580	0.001548	0.676560
		1.5	0.211636	0.001682	0.057477	0.220274	0.001585	0.067926
	1	0.5	0.424714	0.006689	0.910316	0.442049	0.006302	0.915459
		1	0.421635	0.006760	0.808556	0.438844	0.006374	0.818911
		1.5	0.421329	0.006780	0.228566	0.438526	0.006394	0.249390
	1.5	0.5	0.628144	0.015349	0.938421	0.653783	0.014481	0.942005
		1	0.646291	0.014743	0.870327	0.672670	0.013869	0.877601
		1.5	0.635283	0.015131	0.372108	0.661212	0.014263	0.394616
	0.5	0.5	0.209588	0.001705	0.826668	0.220403	0.001584	0.842524
		1	0.210680	0.001692	0.654548	0.221552	0.001571	0.682769
		1.5	0.211546	0.001682	0.057383	0.222462	0.001560	0.075866

-1	1	0.5	0.430628	0.006557	0.911441	0.452849	0.006068	0.919925
		1	0.428571	0.006605	0.811281	0.450686	0.006117	0.828395
		1.5	0.426278	0.006653	0.232724	0.448275	0.006165	0.268774
	1.5	0.5	0.633443	0.015195	0.938769	0.666130	0.014102	0.944716
		1	0.635703	0.015106	0.868304	0.668507	0.014010	0.880637
		1.5	0.643503	0.014821	0.377436	0.676710	0.013721	0.415753
1	0.5	0.5	0.215809	0.001635	0.831178	0.220125	0.001587	0.828116
		1	0.210332	0.001693	0.654797	0.214538	0.001646	0.649296
		1.5	0.214415	0.001650	0.059562	0.218703	0.001603	0.056380
	1	0.5	0.424022	0.006706	0.910185	0.432503	0.006515	0.908475
		1	0.425948	0.006657	0.810498	0.434467	0.006465	0.807106
		1.5	0.425287	0.006673	0.232008	0.433793	0.006482	0.225415
	1.5	0.5	0.641509	0.014905	0.939611	0.654340	0.014474	0.938443
		1	0.638267	0.015016	0.868714	0.651033	0.014586	0.866276
		1.5	0.630119	0.015301	0.369270	0.642721	0.014873	0.362063
2	0.5	0.5	0.212332	0.001675	0.828624	0.214444	0.001651	0.819351
		1	0.214291	0.001650	0.659649	0.216423	0.001626	0.643451
		1.5	0.211755	0.001681	0.057563	0.213862	0.001657	0.048737
	1	0.5	0.427786	0.006625	0.910750	0.432043	0.006530	0.905662
		1	0.425238	0.006680	0.809953	0.429469	0.006584	0.799797
		1.5	0.425342	0.006667	0.232182	0.429575	0.006571	0.212946
	1.5	0.5	0.632757	0.015206	0.938775	0.639053	0.014991	0.935225
		1	0.641014	0.014909	0.869481	0.647392	0.014694	0.862225
		1.5	0.641943	0.014894	0.376121	0.648330	0.014679	0.354901

جدول (5): تقديرات معلمة القياس $\hat{\theta}$ و متوسط مربعات الخطأ التكاملي وتقديرات المعولية عند حجم العينة (n=100)

c	θ	α	$\hat{\theta}_{QL}$	$MSE(\hat{\theta}_{QL})$	$R_{\hat{\theta}_{QL}}(t)$	$\hat{\theta}_{BML}$	$MSE(\hat{\theta}_{BML})$	$R_{\hat{\theta}_{BML}}(t)$
-2	0.5	0.5	0.213973	0.000822	0.829900	0.218296	0.000798	0.834551
		1	0.215011	0.000817	0.659015	0.219354	0.000793	0.667293
		1.5	0.215054	0.000816	0.055431	0.219398	0.000792	0.060394
	1	0.5	0.432291	0.003241	0.911722	0.441024	0.003143	0.914252
		1	0.428365	0.003285	0.810924	0.437019	0.003188	0.816033
		1.5	0.431139	0.003253	0.231645	0.439849	0.003155	0.241967
	1.5	0.5	0.646079	0.007332	0.940025	0.659131	0.007112	0.941770
		1	0.644780	0.007355	0.869902	0.657806	0.007136	0.873545
		1.5	0.641173	0.007416	0.372251	0.654126	0.007196	0.383400
-1	0.5	0.5	0.214539	0.000820	0.830062	0.219987	0.000789	0.837821
		1	0.215143	0.000816	0.659300	0.220606	0.000785	0.673148
		1.5	0.216137	0.000811	0.056297	0.221626	0.000780	0.064885
	1	0.5	0.429792	0.003270	0.911202	0.440706	0.003147	0.915447
		1	0.427742	0.003294	0.810509	0.438604	0.003172	0.819059
		1.5	0.432697	0.003236	0.232836	0.443685	0.003113	0.250320
	1.5	0.5	0.639946	0.007442	0.939384	0.656197	0.007167	0.942325
		1	0.646509	0.007327	0.870178	0.662926	0.007052	0.876245
		1.5	0.643273	0.007384	0.373284	0.659609	0.007109	0.392042
1	0.5	0.5	0.216562	0.000808	0.831587	0.218727	0.000796	0.830056
		1	0.214061	0.000822	0.657982	0.216202	0.000810	0.655239
		1.5	0.215376	0.000815	0.055702	0.217530	0.000803	0.054137
	1	0.5	0.430315	0.003263	0.911362	0.434618	0.003214	0.910517
		1	0.431798	0.003247	0.812199	0.436116	0.003199	0.810513
		1.5	0.424420	0.003330	0.226415	0.428664	0.003281	0.223099
		0.5	0.648819	0.007288	0.940238	0.655308	0.007179	0.939659

	1.5	1	0.644345	0.007359	0.869898	0.650790	0.007250	0.868688
		1.5	0.637832	0.007476	0.370188	0.644210	0.007367	0.366547
2	0.5	0.5	0.214382	0.000821	0.829983	0.215451	0.000815	0.825361
		1	0.216187	0.000810	0.660692	0.217265	0.000804	0.652545
		1.5	0.215295	0.000816	0.055732	0.216369	0.000810	0.051175
	1	0.5	0.430624	0.003261	0.911367	0.432772	0.003236	0.908835
		1	0.428253	0.003288	0.810711	0.430388	0.003264	0.805629
		1.5	0.427032	0.003302	0.228341	0.429162	0.003278	0.218521
	1.5	0.5	0.646650	0.007324	0.940048	0.649875	0.007270	0.938307
		1	0.644417	0.007362	0.869826	0.647630	0.007308	0.866197
		1.5	0.638973	0.007452	0.371041	0.642160	0.007398	0.360219

الاستنتاجات

في هذا البحث، تم استخدام متوسط مربعات الخطأ للمقارنة بين مقدرات معلمة القياس θ المختلفة لتوزيع رايلي تحت دالة خسارة تربيعية وتحت دالة خسارة اسية خطية معدلة، وتم استخدام المحاكاة (طريقة مونت كارلو) في تقدير معلمة القياس ومتوسط مربعات الخطأ ودالة المعولية.

ويلاحظ من نتائج المحاكاة، ان مقدرات معلمة القياس في العينات الصغيرة ($n<40$) تحت داله خساره تربيعية افضل من تقديرات معلمه القياس تحت دالة خسارة اسية خطية معدلة، ويلاحظ ان متوسط مربعات الخطأ يتناقص كلما تزداد قيمة c. لكن في حجوم العينات الكبيرة ($n>40$) جميع مقدرات معلمة القياس لها متوسطات مربعات خطأ متقارب.

التوصيات:

1- يوصي الباحث بتطوير البحث ليشمل البيانات تحت المراقبه وتحت المراقبة التتابعية.

2- يوصي الباحث بتطوير البحث ليشمل البيانات المفقودة.

3- يمكن اعتماد طريقة بيز في البحوث التي تتطلب تقدير دالة معولية لتوزيع رايلي.

References

1. Dey, S. & Das, M. K., (2007); "A Note on Prediction Interval for a Rayleigh Distribution: Bayesian Approach"; American Journal of Mathematical and Management Science 27 (1&2), 43-48.
2. Dyer, D. D. & Whisenand, C. W. (1973); "Linear Unbiased Estimator of the Rayleigh-Distribution Part I: Small Sample Theory for Censored Order Statistics"; IEEE Transactions on Reliability R-(22) (1) 27-32.
3. Pazira, H. and Nasiri, P. (2009); "Minimax Estimation of the Parameter of the Generalized Exponential Distribution, Submitted.
4. Polavko, A. M. (1968); "Fundamentals of Reliability Theory"; New York: Academic Press.
5. Ragab, M. Z., (2002); "Inference for Generalized Exponential Distributions Based on Record Statistics"; Journal of Statistical Planning and Inference, 104, 339-350.
6. Saleem, M. and Aslam, M. (2008); "Bayesian Analysis of the Two Component Mixture of the Rayleigh Distribution with Uniform and Jeffrey Priors"; J. App. Statist. Science 16(4), 105-113.
7. Wang, J. and Li, Y. (2005); "Estimators for Survival Function When Censoring Times are Known"; Communications in Statistics-theory and Methods 34, 449-459.